

Exercices de Mathématiques (Partie I)

MPSI2 2026/2027 – Lycée Condorcet

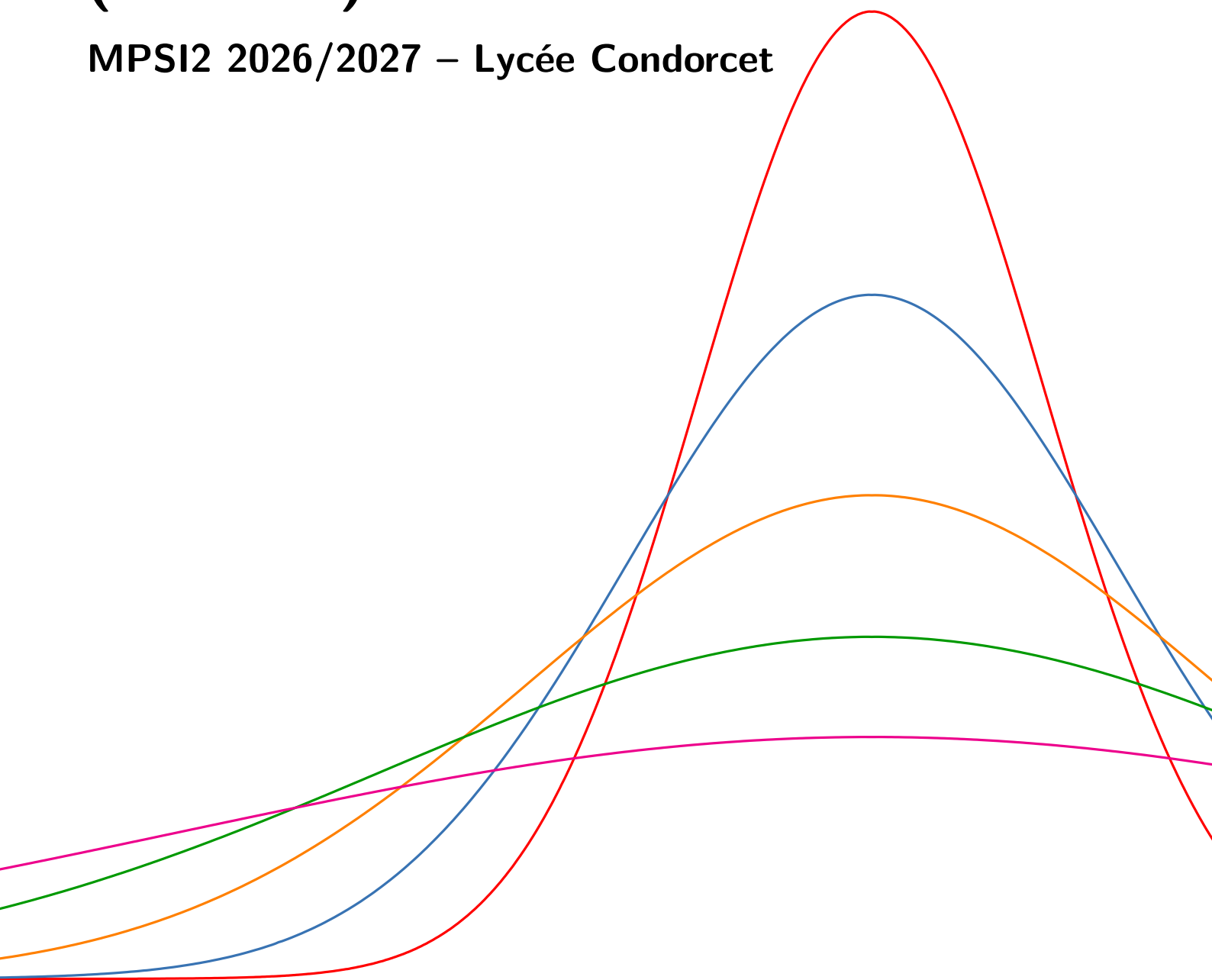
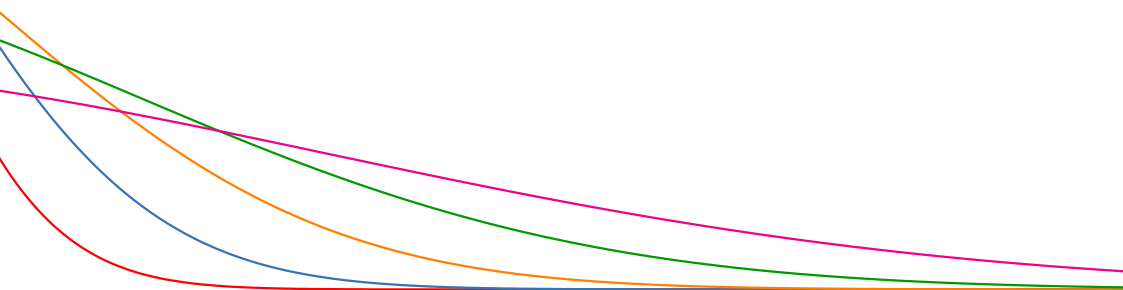


Table des matières

1 - Logique, ensembles et quantificateurs	3
2 - Raisonnements usuels	5
3 - Propriétés des nombres réels	7
4 - Fonctions	9
5 - Trigonométrie	13
6 - Nombres complexes	16
7 - Sommes et produits	20
8 - Systèmes linéaires	25
9 - Décomposition en éléments simples	27
10 - Calcul intégral	28
11 - Équations différentielles	32
12 - Arithmétique des entiers	34
Annexe – Formulaire de trigonométrie	38



Logique, ensembles et quantificateurs

Exercice 1. (★★) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. A l'aide de tables de vérité, montrer que :

- 1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.
- 2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$.
- 3) $(\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}$.
- 4) $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\text{non}(\mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}$.

Exercice 2 – Connecteur de Sheffer. (★★) On définit un nouveau connecteur logique, noté $\uparrow$ (parfois appelé connecteur de Sheffer ou nand) par : pour toutes propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A} \uparrow \mathcal{B} \iff \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}).$$

- 1) Traduire en français le fait que $\mathcal{A} \uparrow \mathcal{B}$ est vraie.
- 2) Construire sans démonstration la table de vérité de $\uparrow$. La suite de l'exercice se fera sans table de vérité, mais en utilisant les propriétés du cours (dont les lois de Morgan).
- 3) Simplifier $\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}$ ainsi que $(\mathcal{A} \uparrow \mathcal{A}) \uparrow (\mathcal{B} \uparrow \mathcal{B})$.
- 4) En déduire une assertion équivalente à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne contenant que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et $\uparrow$ (éventuellement plusieurs fois). Par conséquent, toute assertion contenant les connecteurs non, ou, et peut être réécrite en utilisant uniquement le connecteur $\uparrow$. On dit qu'il forme un système complet.

Exercice 3. (★) Écrire la négation des phrases suivantes :

- 1) $x > 3 \implies f(x) \leq 5$.
- 2) $-4 \leq x < 2$.
- 3) $y < -3$ ou $y > 12$.
- 4) $a < b < c < d$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.
- 6) Si $r \in \mathbb{Q}$, alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
- 7) $\forall x > 1, \exists k \in \mathbb{N}, x^k \geq 2026$.
- 8) $P(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1)))$.
- 9) $(x > -1 \text{ et } f(x) = 0)$ ou $(x \leq -1 \text{ et } g(x) = 0)$.
- 10) $\forall a \in A, \forall b \in A, (ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0))$.
- 11) Tous les élèves de moins de quinze ans ou de plus de dix-huit ans ont une note moyenne comprise entre 15 et 18.
- 12) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^n = y^n \text{ et } x \neq y)$.
- 13) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \varepsilon)$.
- 14) (★★) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- 15) (★★) Il n'a plu qu'un seul jour cette semaine.
- 16) (★★) $\exists! z \in E, g(z) = 0$.

Exercice 4. (★) Écrire la contraposée des implications de l'exercice précédent.

Exercice 5. (★★) Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes et écrire leur négation :

- 1) L'entier 5 est impair.
- 2) La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 3) La suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- 4) L'équation $\ln(x) - x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 5) L'exponentielle de tout réel est strictement positive.
- 6) La fonction polynomiale $P : x \mapsto x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réelle.
- 7) La fonction sin s'annule exactement deux fois sur $[0; 2\pi[$.
- 8) Tout complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. (★) Décrire les parties $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\}$ de $\mathbb{R}$ quand $P(x)$ est la proposition :

- 1) $(x > 1 \text{ et } x < 2) \text{ ou } (x = 1)$.
- 2) $x > 1 \text{ et } x < 6 \text{ et } x \neq 3$.
- 3) $(x \leq 1 \text{ et } x > 2) \text{ ou } (x = -5)$.
- 4) $x \leq 1 \implies x \leq 0$.

Exercice 7. (★) Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

- 1) L'ensemble des entiers naturels divisibles par 7.
- 2) L'ensemble des fractions d'entiers (relatifs) dont le dénominateur est une puissance de 3.
- 3) L'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés d'entiers.
- 4) L'ensemble des inverses d'entiers naturels (non nuls).
- 5) L'ensemble des carrés parfaits.

Exercice 8. (★) Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation et sa contraposée.

- 1) Si une somme de 2026 réels est nulle, alors ils sont tous nuls.
- 2) Si Mozart a composé *Le lac des cygnes*, alors $1 + 1 = 3$.
- 3) Si un élève ne connaît pas son cours en colle de Maths, alors il aura strictement moins de 10.

Exercice 9. (★) Montrer que les phrases « Ceux qui parlent ne savent pas » et « Ceux qui savent ne parlent pas » sont équivalentes.

Exercice 10. (★) Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant).

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq x^2 \leq M$.
- 2) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq x^2 \leq M$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq \sin(x) \leq M$.
- 4) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq \sin(x) \leq M$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$.
- 6) $\exists x \in [0; 1], \forall y \in [0; 1], x \leq y$.
- 7) $1 + 1 = 2 \implies 1 + 1 = 3$.
- 8) $1 + 1 = 3 \implies 1 + 1 = 2$.
- 9) $1 = 0 \implies \exists k \in \mathbb{N}, 3 = 2k$.
- 10) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \implies x \geq 3$.
- 11) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \left(x < y \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$.
- 12) $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$.
- 13) $\exists ! x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0$.
- 14) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n + m$ soit impair.
- 15) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \times m$ soit impair.
- 16) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
- 17) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
- 18) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
- 19) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.
- 20) $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \exists z \in \mathbb{N}, \sqrt{z} > x + y$.
- 21) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \ln(\ln(y)) > x$.
- 22) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y = 0 \implies x = y = 0)$.
- 23) Il existe f et g croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f - g$ soit la fonction nulle

Raisonnements usuels

Exercice 1. (★) Montrer les propositions suivantes par l'absurde ou par contraposée :

- 1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
- 2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
- 3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, si x et y sont deux réels tels que $x + y > \varepsilon$, alors $x > \frac{\varepsilon}{2}$ ou $y > \frac{\varepsilon}{2}$.
- 4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'implication : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \implies a \leq b$.
- 5) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 2. (★★) On admet que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (nous le montrerons dans le chapitre 12).

- 1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.
- 2) Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.

Exercice 3. (★) Combien un village doit-il compter d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 4. (★★) Parmi 51 entiers distincts compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours au moins deux consécutifs.

Exercice 5. (★★) Montrer que, tous les matins, il existe deux élèves qui serrent le même nombre de mains.

On pourra utiliser le principe des tiroirs avec pour « chaussettes » les nombres $a_1, \dots, a_n$ de mains serrées par les élèves (en numérotant les élèves de 1 à n et en notant, pour tout k compris entre 1 et n , a_k le nombre de mains serrées par l'élève k).

Exercice 6. (★★) Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 7. (★★) A l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 8. (★) Où est l'erreur dans le raisonnement suivant :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $n = n^2$ ».
- $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $n = n^2$ donc, en multipliant par n , il vient $n^2 = n^3$ donc $n = n^3$, si bien que $n - 1 = n^3 - 1 = (n - 1) \times (n^2 + n + 1)$. En divisant par $n - 1$ (non nul car $n \geq 2$), on obtient $1 = n^2 + n + 1$ et, enfin, $n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 – Inégalité de Bernoulli. (★) Montrer que

$$\forall x \in [-1; +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 10. (★) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $2^n > n^2$.

Exercice 11. (★) Considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 12. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 13. (★★) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Exercice 14. (★★) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant n réels distincts. En raisonnant par récurrence, montrer que l'ensemble $B = \{x + y \mid (x, y) \in A^2\}$ contient au moins $2n - 1$ éléments distincts.

Exercice 15. (★★★) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 distinctes.

Propriétés des nombres réels

Exercice 1. (★) Sans calculatrice, simplifier :

$$1) \frac{12 \times 27 \times 28 \times 7700}{24 \times 18 \times 42 \times 35 \times 55}, \quad 2) \frac{5}{56} - \frac{1}{42} - \frac{7}{30} + \frac{11}{40}, \quad 3) \frac{\frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239}}{\frac{119 \times 239 + 120}{119 \times 239}} - 1.$$

Exercice 2. (★) Sans calculatrice, déterminer le signe des expressions suivantes :

$$1) \frac{7}{4} - \sqrt{3}, \quad 2) 3\sqrt{5} - 2\sqrt{19} + \sqrt{7}, \quad 3) \sqrt{208} + \sqrt{89} - \sqrt{569}, \quad 4) \pi - \sqrt{10}.$$

Exercice 3. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$1) 2^{n+1} - 2^n, \quad 2) 3^n + 3^n + 3^n, \quad 3) (5^{5^n})^{5^n}, \quad 4) (-1)^{2-7n} + \frac{1}{(-1)^{5-9n}}, \quad 5) \frac{1}{\sqrt{n^4+4} + \sqrt{n^4+3}}.$$

Exercice 4. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$1) 5^{(3^2)} - (5^3)^2, \quad 2) 4^{3^{2+3^{8+6^5}}}, \quad 3) (-1)^{9^{7655432}}, \quad 4) \sqrt[5]{25 \times 90 \times 72 \times 150}.$$

Exercice 5. (★) Soient x et y des réels positifs tels que $y \leq x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}.$$

Exercice 6. (★★) Pour quelles valeurs des réels x et y , l'expression

$$\sqrt{2 + \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}}$$

est-elle définie ? La simplifier le cas échéant.

Exercice 7. (★) Soit x un réel. Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ si c'est possible :

$$1) x^2 = 36 \dots x = 6. \quad 3) |x| \leq 2 \dots -2 \leq x \quad 5) x^{-4} \leq 16 \dots x \leq -1/2 \\ 2) |x| > 4 \dots x < -5 \quad 4) 3|x| \geq x^2 \dots -3 \leq x \leq 3. \quad 6) x^2 \leq x \dots x \geq 0.$$

Exercice 8. (★) Soient a , b , c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2 + bx + c < 0$?

Exercice 9. (★) Montrer que, pour tous réels positifs x et y , $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

Exercice 10. (★) Montrer que, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq 1 + x$.

Exercice 11. (★★)

- 1) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2} \sqrt{x+y}$.
- 2) Examiner le cas d'égalité de cette inégalité.
- 3) En déduire que, pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} + \sqrt{\frac{z+x}{2}}$.

Exercice 12. (★★) Montrer que, si n est le produit de quatre entiers naturels consécutifs, alors $n + 1$ est le carré d'un entier.

On pourra commencer par développer $(ax^2 + bx + c)^2$ lorsque a , b , c et x désignent des réels.

Exercice 13. (★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- 1) $|7x - 4| = |3 - 2x|$,
- 2) $|x - 19| = |x + 11|$,
- 3) $|5 - x| = 2x$,
- 4) $|4 - x| - |x + 2| + |3x + 5| = 9$,
- 5) $13x - 5x^2 = 9$,
- 6) $(9 - x)(x + 3) = 30$,
- 7) $|x^2 + x - 3| = |x|$,
- 8) $6x^4 + 11x^2 - 7 = 0$,
- 9) $\sqrt{x + 9} = x - 3$,
- 10) (★★) $\sqrt{1 + x} - \sqrt{4 - x} = 2$,

Exercice 14. (★★) Résoudre le système d'équation $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ xy = 9 \end{cases}$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. (★★) Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $a > 0$ et $b < c$. Résoudre l'équation $\sqrt{x + b} + \sqrt{x + c} = a$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16. (★) Résoudre l'équation $3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$ d'inconnues x, y et z dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17. (★) Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- 1) $2x^2 + 25x - 42 > 0$,
- 2) $|2x - 5| < |x + 3|$,
- 3) $x^2 - 4|x| \leq 5$,
- 4) $|x + 3| - |1 - 3x| > -2$,
- 5) $|x^2 - 6x + 7| < 1$.
- 6) $23x^2 - 12x^4 \geq 10$,
- 7) $\sqrt{x} > 1 + \frac{6}{\sqrt{x}}$,
- 8) $2(x - 2)(1 - 2x) + 1 < x(x + 3)$,
- 9) $\frac{1}{3x^2 + 2x + 4} \geq \frac{2}{5x^2 + 6x + 1}$,
- 10) (★★) $2x - 5 - \sqrt{4x - 7} < 0$.

Exercice 18. (★★) Posons $x_0 = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

- 1) Vérifier que $x_0^3 + 3x_0 - 14 = 0$.
- 2) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + ax + b)$.
- 3) En déduire que $x_0 = 2$.

Exercice 19. (★) Soit n un entier naturel. Exprimer le plus grand entier naturel m vérifiant $2m \leq n$ et le plus grand entier naturel p vérifiant $2p + 1 \leq n$, en fonction de n .

Exercice 20. (★) Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout réel x .

Exercice 21. (★) Montrer que, pour tous réels x et y , $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0; 1\}$.

Exercice 22. (★) Soit $(a, x, T) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [a; a + T[$. Exprimer k à l'aide de parties entières.

Exercice 23. (★★) Résoudre l'équation $\lfloor 2x + 5 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. (★★) Résoudre l'équation $\lfloor 3x - 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. (★★) Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Préciser si les ensembles suivants sont majorés ou minorés et donner, lorsque c'est possible, leur minimum et leur maximum :

- 1) $]-5; 2]$,
- 2) $\mathbb{R}_+^*$,
- 3) $[-7; -3] \cup]6; 7[$,
- 4) $\{(-1)^n a + b \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- 5) $\{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- 6) $\left\{ \frac{a}{n} + b \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
- 7) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
- 8) $\left\{ \frac{1}{3n} - \frac{2}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
- 9) $\{an^2 - bn + c \mid n \in \mathbb{N}\}$,
- 10) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \mid (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$,
- 11) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^p}{p} \mid (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$.

On poursuivra cet exercice dans le TD n° 14.

Exercice 26. (★★) Déterminer un majorant et un minorant (grossiers) de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{4x^2 - 2x^4 + 3}{x^4 + x^2 - x + 1} \mid 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

On poursuivra cet exercice dans le TD n° 4.

Feuille d'exercices n° 4

Fonctions

I Résultats généraux sur les fonctions

Exercice 1. (★) Déterminer $f(A)$ dans les cas suivants (sans avoir recours à une étude de fonctions) :

- 1) $f : x \mapsto x^2$ et $A =]-3; +\infty[$,
- 2) $f : x \mapsto 2 - x^3$ et $A =]2; +\infty[$,
- 3) $f : x \mapsto |x + 2|$ et $A = [-4; -1/2[$,
- 4) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $A =]-4; 0[\cup]0; 3]$,
- 5) $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ et $A =]-3; 0[\cup]0; 2]$.

Exercice 2. (★) Pour les fonctions f et g définies par les expressions suivantes, donner le domaine de définition et une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$. On commencera bien entendu par donner les domaines de définition de f et de g .

- 1) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2$,
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = x^6$,
- 3) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2} \ln(x)$,
- 4) $f(x) = \text{th}(x)$ et $g(x) = \frac{1}{1 - x^2}$,
- 5) $f(x) = (\ln(x))^2$ et $g(x) = x^2 - 7x + 10$,
- 6) $f(x) = \text{th}(x)$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
- 7) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
- 8) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$.

Exercice 3. (★★) Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. En quel(s) réel(s) est-il atteint ? Est-elle majorée ?

Exercice 4. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f \circ f$ est croissante et la fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 5. (★) Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions suivantes :

- 1) $x \mapsto 1 + \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$.
- 2) $x \mapsto \frac{1}{2} \text{ch}(x - 3)$.
- 3) $x \mapsto -\ln(1 + x)$.
- 4) $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x}$.

Exercice 6. (★) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto \frac{e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2}$ est paire.

Exercice 7. (★) Soit E une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f + g$ et fg ?

Exercice 8. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Prouver que $x \mapsto f(\omega x)$ est périodique, et préciser une période.

Exercice 9. (★★) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone et périodique est constante.

Exercice 10. (★★) Définissons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ par

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Nous en reparlerons dans la feuille d'exercice n° 18 et verrons notamment qu'elle n'est continue en aucun point.

- 1) A quoi ressemblerait la courbe représentative de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (sans avoir recours à la dérivation puisqu'elle n'est continue nulle part) ?
- 2) Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est périodique et que tout rationnel est une période.
- 3) Y a-t-il une plus petite période ?

Exercice 11. (★) Donner l'équation de la droite (D) du plan passant par les points de coordonnées $(1, 5)$ et $(-3, 2)$. Donner l'équation de la droite (Δ) du plan de coefficient directeur $-1/2$ et passant par le point $(4, 6)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de (D) et (Δ).

II Calculs de limites et de dérivées

Exercice 12. (★ à ★★) Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)},$ | 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$ | 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x,$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{e^{3x}},$ | 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ x }{x},$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x},$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}},$ | 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} e^{-\sqrt[5]{x}},$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sh}(5x)},$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2 x }{x},$ | 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\ln(x)^2},$ | 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\operatorname{th}(x)}{x} \right).$ |

Exercice 13. (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression de la dérivée).

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $x \mapsto e^{6x^{2026} + 3x - 5},$ | 4) $x \mapsto \operatorname{th}(\operatorname{sh}(\operatorname{ch}(x))),$ | 7) $x \mapsto (1 - x)^{1/x},$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt[3]{x} \ln(x^2 + 1),$ | 5) $x \mapsto \frac{1}{(\ln(2x^2 - 3x - 1))^5},$ | 8) $x \mapsto \sqrt[4]{1 - \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}},$ |
| 3) $x \mapsto \frac{\pi^x}{x^\pi},$ | 6) $x \mapsto (2 - x^e)^{3/7},$ | 9) $x \mapsto x^{x^x},$ |

On ne cherchera pas à déterminer la dérivabilité en un point du domaine de définition où les théorèmes généraux d'opérations n'ont pas permis de conclure (on réserve cela pour le TD n° 19).

Exercice 14. (★) Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur des domaines à déterminer et expliciter leurs dérivées successives.

- | | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|---|
| 1) $x \mapsto (x + b)^n,$ | 3) $x \mapsto \frac{1}{(x + b)^n},$ | 5) $x \mapsto (ax + b)^\alpha,$ | 7) $x \mapsto \operatorname{sh}(ax + b),$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt[n]{x + b},$ | 4) $\ln,$ | 6) $x \mapsto e^{ax + b},$ | 8) $x \mapsto \operatorname{ch}(ax + b),$ |

Exercice 15. (★) Montrer que les courbes représentatives des fonctions carré et inverse admettent une unique tangente commune que l'on précisera.

Exercice 16. (★★) Pour tout réel m , on note Γ_m le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{x + m}{x^2 + 1}$. Lorsque m parcourt $\mathbb{R}$:

- Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
- Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes.

III Études de fonctions

Exercice 17. (★★ à ★★★) Étudier (domaine de définition, variations, limites, éventuelles asymptotes, branches paraboliques, convexité, courbes) les fonctions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \ln(x^2 + x + 2),$ | 6) $x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 6},$ |
| 2) $x \mapsto x^2 - 8x + 15 - 4 - x ,$ | 7) $x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1}{3} \sqrt{ x^2 - 16 },$ |
| 3) $x \mapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3},$ | 8) $f : x \mapsto (x^2 - 1) \ln \left(\frac{x + 1}{1 - x} \right),$ |
| 4) $x \mapsto -\ln(x^2 - 3x + 2),$ | |
| 5) $x \mapsto e^{-x^2},$ | |

9) $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 1},$

11) $f : x \mapsto e^{1/x} \sqrt{x(x + 2)},$

10) $f : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt[3]{1 + x^6})}{x},$

12) $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x)),$

13) $x \mapsto x^{x^3}.$

IV Inégalités, égalités, équations, inéquations

Exercice 18. (★) Résoudre les équations ou inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $2e^x - 35e^{-x} = 9,$ | 6) $\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},$ |
| 2) $2(\ln(x))^2 = 12 + 5 \ln(x),$ | 7) $\ln(-x - 3) - \ln(x - 5) + \ln(x + 4) \geq 0,$ |
| 3) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x},$ | 8) $\ln(-x - 3) \geq \ln \left(\frac{x - 5}{x + 4} \right),$ |
| 4) $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1},$ | |
| 5) $\ln(x) - \log(x) = 1,$ | |

Exercice 19. (★★) Résoudre l'équation $x^x = \frac{3}{4} \sqrt{6}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 20. (★) Montrer que la fonction $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. (★★★) Soit $a > 0$. Donner le nombre de points fixes de $x \mapsto a^x$ selon la valeur de a .

Exercice 22. (★) Résoudre les inéquations, d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$,

- | | | |
|------------------------|--|---|
| 1) $2^n \geq 1000000,$ | 2) $\frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \geq \frac{7}{2},$ | 3) $\frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leq 3 \ln(2).$ |
|------------------------|--|---|

Exercice 23. (★★) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Résoudre l'inéquation $\log_a(x) > \log_a(2 - 3x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. (★) Montrer les inégalités suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1) $\forall x \in [0; 1], \ln(1 + x) \geq \frac{x}{2}.$ | 3) $\forall x \in [1; +\infty[, \ln(x) \geq \frac{(x - 1)(3 - x)}{2}.$ |
| 2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{th}(x) \leq \frac{16}{25}x + \frac{15 - 16 \ln(2)}{25}.$ | 4) $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \leq \sqrt[3]{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{3}.$ |

Exercice 25. (★) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier les égalités suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y),$ | 5) $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2 \operatorname{sh}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{ch}(\frac{x-y}{2}),$ |
| 2) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y),$ | 6) $\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(y) = 2 \operatorname{ch}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{sh}(\frac{x-y}{2}),$ |
| 3) $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2 \operatorname{ch}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{ch}(\frac{x-y}{2}),$ | 7) $\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x) \operatorname{th}(y)}.$ |
| 4) $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y) = 2 \operatorname{sh}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{sh}(\frac{x-y}{2}),$ | |

Exercice 26. (★★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 27. (★★) Dans l'exercice 25 du TD n° 3, nous avons montré que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{4x^2 - 2x^4 + 3}{x^4 + x^2 - x + 1} \mid 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

est majoré et minoré. À l'aide de factorisation de polynômes, trouver la valeur du minimum.

V Bijections et réciproques

Exercice 28. (★) Justifier que les fonctions suivantes sont bijectives et expliciter leur réciproque.

- 1) $x \mapsto \frac{3+2x}{x-5}$ de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- 2) $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ de $\mathbb{R}_+$ sur $[1; +\infty[$.
- 3) $x \mapsto \begin{cases} \frac{4-x}{2} & \text{si } z \in]0; 2[\\ (x-2)^2 & \text{si } z \in [2; 3] \end{cases}$ de $]0; 3]$ sur $[0; 2[$.

Exercice 29. (★★) Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) puis expliciter f^{-1} sur J .

- 1) $x \mapsto \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}$,
- 2) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}$,
- 3) $x \mapsto \ln(x^{3/4} - 1)$.

Exercice 30. (★★)

- 1) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$. Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argth . Représenter graphiquement Argth . De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argth et calculer Argth' .
- 2) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argsh . Représenter graphiquement Argsh . De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argsh et calculer Argsh' .
- 3) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1; +\infty[$. Représenter graphiquement Argch . Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argch . De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argch et calculer Argch' .

Exercice 31. (★★) Considérons $f : x \mapsto xe^{1-x}$.

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Notons $g = f^{-1}$.
- 2) Étudier la dérivabilité de g et exprimer g' en fonction de g (et sans exponentielle).
- 3) Montrer que g admet un point d'inflexion en un point à préciser.
- 4) Représenter graphiquement l'allure du graphe de g .

On attendra d'avoir vu le prochain chapitre pour traiter cet exercice puisqu'il fait intervenir des fonctions trigonométriques.

Exercice 32. (★★) Notons $u : t \mapsto \frac{1 + \ln(t)}{t}$.

- 1) a) Démontrer que la fonction est une bijection strictement croissante de $]0; 1]$ sur $] -\infty; 1]$.
b) Montrer que sa fonction réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; 1]$.
- 2) En déduire l'existence d'une fonction $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel θ , $r(\theta) \in]0; 1]$ et

$$r(\theta)e^{-r(\theta)\cos(\theta)} = \frac{1}{e}.$$

- 3) a) Calculer de manière simple $r(0)$ et $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Montrer que r est une fonction continue, 2π -périodique et paire.
c) Montrer que r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 2\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in]0; 2\pi[, r'(\theta) = \frac{r(\theta)^2 \sin(\theta)}{r(\theta)\cos(\theta) - 1}.$$

Trigonométrie

I Formules de trigonométrie et équations trigonométriques

Exercice 1. (★) Donner une valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Exercice 2. (★★) Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

- 1) $2 \cos(4x + \pi) = 1$,
- 2) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$,
- 3) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0$,
- 4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3} \sin(5x)$,
- 5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$,
- 6) $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}$.
- 7) $2 \sin(x) \leq -1$.
- 8) $\sin^2(x) + 3 \cos(x) < 1$.

Pour les questions 7 et 8, on pourra s'aider d'un dessin. Mais, pour justifier correctement, on se ramènera à des cas de positivité de cosinus ou sinus.

Exercice 3. (★★) Résoudre l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (★★) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation $a \cos(x) + b \sin(x) = c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (★★) Résoudre l'équation $2 \sin(x) + 3 \cos(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. (★) Soient $n \geq 2$ et $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.

Exercice 7. (★★) Donner la valeur de $\alpha = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$.

II Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 8. (★) Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions $x \mapsto 1 + \sin(2x)$ et $x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 9. (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression de la dérivée).

- 1) $x \mapsto (1 + x^2)e^{\text{Arctan}(x)}$,
- 2) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\text{Arcsin}(x)}}$,
- 3) $x \mapsto \cos(\sin^2(x))$,
- 4) $x \mapsto \ln(1 + \cos(\pi x^2))$,
- 5) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,
- 6) $x \mapsto \ln(\cos(x) - 1)$,
- 7) $x \mapsto \frac{\ln(2 + \cos(x))}{\exp(\tan(x))}$,
- 8) $x \mapsto \arccos\left(4x^2 - \frac{3}{x^2}\right)$,
- 9) $x \mapsto \sqrt[5]{xe^{\sin(\ln(x))}}$,
- 10) $x \mapsto \arctan(\arctan(\arctan(x)))$,
- 11) $x \mapsto (\cos(x))^{\sin(x)}$,
- 12) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + 2)^4}$,
- 13) $x \mapsto \arcsin\left(\frac{2}{\pi} \arccos(x)\right)$,
- 14) $x \mapsto \sqrt{3\cos(x) + 4\sin(x)}$.

On ne cherchera pas à déterminer la dérivabilité en un point du domaine de définition où les théorèmes généraux d'opérations n'ont pas permis de conclure (on réserve cela pour le TD n° 19).

Exercice 10. (★) Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

$$\begin{array}{llll} 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x^2) e^{-x}, & 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - \cos(x)}, & 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \operatorname{Arctan}(x), & 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{x}, \\ 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin(x))x, & 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin(x)}{(x+1)^2}, & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}, & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arccos}(x)}{x}, \end{array}$$

Exercice 11. (★ à ★★) Étudier (domaine de définition, variations, limites, éventuelles asymptotes, branches paraboliques, convexité, courbes) les fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1) x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & 3) x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x^2 + x + 2}\right), & 5) x \mapsto \operatorname{Arctan}(x^2 \ln(x)), \\ 2) x \mapsto x \operatorname{Arccos}(x), & 4) x \mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^3), & 6) x \mapsto \operatorname{Arccos}(x) \operatorname{Arcsin}(x). \end{array}$$

Exercice 12. (★) Montrer que chacune des fonctions suivantes est périodique sur son domaine de définition.

$$\begin{array}{lll} 1) x \mapsto \sin(7 + 6x), & 2) x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, & 3) x \mapsto \cos\left(\frac{2x}{43}\right) + \sin\left(\frac{2x}{47}\right). \end{array}$$

Exercice 13. (★★★) Déterminer deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique.

Exercice 14. (★★) Montrer que :

$$\begin{array}{ll} 1) \forall x \in \mathbb{R}_+, & x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \\ 2) \forall x \in \mathbb{R}_+, & x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}. \end{array}$$

Exercice 15. (★★) Sans utiliser d'arguments de convexité, montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}.$$

Exercice 16. (★★)

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.
- Étudier la dérivabilité de f^{-1} et exprimer sa dérivée.

Exercice 17. (★★) Donner le nombre de solutions de l'équation $\sin(x) = \ln(x)$.

Exercice 18. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Exercice 19. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 20. (★★) Calculer $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$ pour tout réel x .

Exercice 21. (★★) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier (quand elles ont un sens) les expressions suivantes :

$$f(x) = \tan(2 \operatorname{Arctan}(x)), \quad g(x) = \cos(4 \operatorname{Arctan}(x)) \quad \text{et} \quad h(x) = \sin(3 \operatorname{Arctan}(x)).$$

Exercice 22. (★★) Soit $x \in [0; 1]$. Simplifier l'expression $\operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 23. (★★) Montrer les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} 1) \operatorname{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2}. \\ 2) \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3) = \pi. \end{array}$$

Exercice 24. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} 1) \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}. & 2) \sin(2 \operatorname{Arccos}(2 \operatorname{Arctan}(x))) = 0. \end{array}$$

Exercice 25. (★★)

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Soient x et y des réels tels que $xy \neq 1$. Montrer que

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

$$\text{où } k = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1, x > 0, y > 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1, x < 0, y < 0 \end{cases}.$$

- Montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Exercice 26. (★★) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \times \operatorname{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 27. (★★) On introduit les fonctions

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \quad \text{et} \quad g : x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \tan(x).$$

- Préciser l'ensemble de définition D_f de f . Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
- Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\operatorname{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Exercice 28. (★★★) En s'inspirant de l'exercice précédent, simplifier et tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(4x^3 - 3x)$.

Exercice 29 – Coordonnées cartésiennes et polaires. (★) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit M un point du plan qui n'est pas O . Notons (x, y) ses coordonnées cartésiennes et (r, θ) ses coordonnées polaires (c'est-à-dire que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure $\theta \in [0; 2\pi[$ et que la longueur OM vaut r).

- Montrer que $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.

$$2) \text{ Montrer que } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta \equiv \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}.$$

Nombres complexes

I Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. (★) Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x + iy$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7i}{3-2i}, \quad \frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}}, \quad (-i)^{2020}, \quad 2\pi e^{i\frac{\pi}{8}}, \quad \frac{(i-2)^3+2i\sqrt{5}+9}{(1-i\sqrt{2})^2+3}, \quad \frac{j^{12}}{1+j}, \quad j+2j^2+3j^3, \quad (2-j)(3+2j)$$

Exercice 2. (★) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n$ des complexes non nuls de même module. Montrer que

$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 – Formule du parallélogramme. (★) Montrer que, pour tous complexes z et z' ,

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi l'appelle-t-on formule du parallélogramme ?

Exercice 5. (★) Soient z et z' deux complexes. Montrer que

$$1) \quad 1 \leq |z+z'| + |1+z| + |z'|, \quad 2) \quad |z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2).$$

Exercice 6. (★★) On dit qu'un entier n est somme de deux carrés d'entiers si il existe x et y dans $\mathbb{N}$ tels que $n = x^2 + y^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 7. (★) Soient $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|u| = 1$.

Exercice 8. (★) Soit $(s, t, u) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|st+tu+us| = |s+t+u|$.

Exercice 9. (★★) Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

II Forme trigonométrie, écriture exponentielle, racines de l'unité

Exercice 10. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$$\sqrt{3}+i, \quad -2e^{\frac{2i\pi}{7}}, \quad e^{2i\theta}+1, \quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n, \quad (1+e^{i\theta})^n, \quad \frac{1}{(\sqrt{3}+3i)^4}, \quad (1-i)^n - (1+i)^n$$

Exercice 11. (★) Écrire $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12. (★) Déterminer les entiers n tels que $(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^n$ soit réel.

Exercice 13. (★) Donner un complexe de module 1 qui ne soit pas une racine de l'unité.

Exercice 14. (★) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Donner un argument de $z = x \left(\frac{1-i\tan(\alpha)}{1+i\tan(\alpha)}\right)$.

Exercice 15. (★★) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est égal à

$$2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)+|z|}\right).$$

Exercice 16. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions $\sin^3(x) \cos^2(x)$ et $\cos(2x) \sin^2(3x)$.

Exercice 17. (★★) Simplifier

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 18. (★★) Soit $[0; 2\pi]$. Donner le module et un argument de $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.
On pourra utiliser le fait que, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$.

Exercice 19. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^{ix} - 1| \leq |x|$.
Est-ce encore vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$?

Exercice 20. (★) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leq e^{|z|}$ et étudier les cas d'égalité.

III Résolution d'équations

Exercice 21. (★) Déterminer les racines carrées des complexes suivants : i , $1-i$, $5+4i$ et $5\sqrt{3}+2i\sqrt{2}$.

Exercice 22 – Équations polynomiales de degré 2. (★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad 2z^2 - 5z + 6 = 0, & 4) \quad iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0, \\ 2) \quad z^2 - 2z \cos(\theta) + 1 = 0 \text{ où } \theta \in \mathbb{R}, & 5) \quad (z-i)^2 = -(z+1-i)^2, \\ 3) \quad z^2 + 5iz + 4 = 0, & 6) \quad |z|^2 + 3|z| - 4 = 0. \end{array}$$

Exercice 23. (★) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Trouver deux réels p et q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 24. (★) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 25. (★★) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \begin{cases} x+y &= 2 \\ xy &= 3 \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x+y &= 1 \\ xy &= i \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} x+y &= 3 \\ xy &= 3-i \end{cases} \end{array}$$

Exercice 26 – Équations polynomiales de degré supérieur à 3. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad z^3 = \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}, & 4) \quad z^3 - i = 6(z+i), \\ 2) \quad z^3 + 3z - 2i = 0, & 5) \quad z^4 = -7 - 24i, \\ 3) \quad z^6 + z^3 + 1 = 0, & 6) \quad z^3 + (2-4i)z^2 - (2+4i)z + 16 + 8i = 0. \end{array}$$

Indication : l'équation de la question 6 admet une racine imaginaire pure.

Exercice 27. (★★) Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c = 1 \\ abc = 1 \end{cases}$, d'inconnues a, b et c dans $\mathbb{U}$.

On pourra s'intéresser à la fonction $f : z \mapsto (z-a)(z-b)(z-c)$.

Exercice 28 – Équations avec conjugaison. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1) z^4 = z + \bar{z}, \quad 2) \frac{\bar{z}^7}{z^3} = \frac{1}{z^3}, \quad 3) \bar{z} = z^n, \quad 4) \bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1).$$

Exercice 29 – Équations avec exponentielle complexe. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$1) e^z = 3\sqrt{3} - 3i, \quad 2) e^z = -1 + 2i, \quad 3) e^z = -12 - 5i, \quad 4) e^z(1 - e^z) = 1, \quad 5) e^z + e^{-z} = 2i, \quad 6) (1+i)e^{2z} = e^z + ie^{-z}.$$

IV Interprétation géométrique des complexes

Exercice 30. (★) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est réel si et seulement si $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 31. (★) Caractériser géométriquement les similitudes suivantes :

$$1) z \mapsto 4iz + 1, \quad 2) z \mapsto 3(1-i)z + 8 + i, \quad 3) z \mapsto (2-i)z + i.$$

Exercice 32. (★)

- Donner une expression de la rotation r de centre $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
- On note h l'homothétie de centre $2-i$ et de rapport $-\frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $r \circ h$.
- On note c la symétrie centrale de centre $1+i$. Déterminer une expression de $r \circ c$.
- On note s la symétrie d'axe des abscisses. Déterminer une expression de $r \circ s$.

Exercice 33. (★)

- Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.
- Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une rotation, soit une translation.

Exercice 34. (★★) Soient A, B et C trois points du plan d'affixes a, b et c . On dit que ABC est un triangle équilatéral direct (respectivement indirect) si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (respectivement $-\frac{\pi}{3}$).

- Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$. Les complexes a, b, c jouent-ils le même rôle ?
- En déduire que le triangle ABC est équilatéral (direct ou indirect) si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 35. (★★) Représenter graphiquement les ensembles suivants dans le plan complexe :

$$\begin{aligned} F &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Im}(z) > 0\}, & F &= \{i + 2e^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}\}, \\ B &= \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z-3| < 3\}, & G &= \{xi + 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \mid -2 \leq x < 1\}, \\ C &= \{i + re^{i\frac{\pi}{3}} \mid r > 0\}, & H &= \{re^{i\theta} \mid 0 < r \leq 2, 3\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]\}, \\ D &= \{i + re^{-i\frac{\pi}{3}} \mid 2 < r < 4\}, & I &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 \in \mathbb{R} \mid z|^4 \geq 2\}, \\ E &= \{i + 2e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}, & J &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^3) = \operatorname{Im}(z^3)\}. \end{aligned}$$

Exercice 36. (★) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

- les points d'affixes j, z et jz soient alignés.
- les points d'affixes i, z et iz forment un triangle isocèle rectangle en i .
- les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral (non réduit à un point)

Exercice 37 – Parallélogrammes. (★★) Soient A, B, C et D trois points du plan non alignés trois à trois.

- En utilisant des complexes, justifier que les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux,
- ② les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux,
- ③ $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu,

On suppose dans la suite que c'est le cas. On dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

- Montrer que (AB) et (BC) sont orthogonales (il s'agit alors d'un rectangle) si et seulement si les longueurs AC et BD sont égales.
- Montrer que les longueurs AB et BC sont égales (il s'agit alors d'un losange) si et seulement si (AC) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 38. (★★) Trouver les complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme. Montrer qu'il s'agit alors d'un losange.

Sommes et produits

I Sommes

Exercice 1. (★) Réexprimer les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

- | | |
|--|--|
| 1) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 104$, | 5) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{19} - a_{20}$, |
| 2) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + \dots + 361$, | 6) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5 + \dots + a_{30} a_{31}$, |
| 3) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 1024$, | 7) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^{38}}{40}$. |
| 4) $1 + 2^7 + 3^6 + 4^5 + 5^4 + 6^3 + 7^2 + 8$, | |

Exercice 2. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme P_n des entiers pairs de 0 à $2n$ et la somme I_n des entiers impairs de 1 à $2n + 1$.

Exercice 3. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\sum_{i=n}^{3n+1} 2^{i+1}$, | 5) $\sum_{k=0}^n (-1)^k 3^{2k-1}$, | 9) $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$, |
| 2) $\sum_{j=1}^n \sqrt{2^j}$, | 6) $\sum_{k=1}^n \ln(k)$, | 10) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, |
| 3) $\sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2}$, | 7) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$, | 11) (★★) $\sum_{k=2}^n k \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, |
| 4) $\sum_{j=0}^{2n} \frac{7^j - 2 \cdot 3^{2j}}{5^j}$, | 8) $\sum_{\ell=1}^n (n\ell - 1)$, | 12) (★★) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k^2 - 1}}$. |

Pour la dernière somme, on utilisera l'exercice 5 du TD n° 3.

Exercice 4. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$ et $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$.

Exercice 5. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 6. (★) Soient $x \in]-1; 1[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$ | 2) $\sum_{k=0}^n \cos(ak + b)$, | 3) $\sum_{k=0}^n x^k \sin(ak)$ | 4) $\sum_{k=0}^n x^k \cos(ak)$. |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|

Exercice 7. (★★) Soient $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ sans utiliser de nombres complexes mais en commençant par les multiplier par $2 \sin(\frac{x}{2})$ puis en utilisant des sommes télescopiques.

Exercice 8. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes de module 1. On pose

$$z = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right).$$

Montrer que z est un réel, et que $0 \leq z \leq n^2$.

Exercice 9. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 10. (★★)

- 1) Résoudre l'équation $\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$, de deux façons différentes.
- 2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 11. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 12. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Exercice 13 – Somme géométrique dérivée. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, posons

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}.$$

- 1) En dérivant de deux manières différentes la fonction polynomiale $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$, déterminer une expression de $S_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) En raisonnant par récurrence, montrer que la formule trouvée à la question 1 est valable pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- 3) a) Vérifier que, pour tous $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$,

$$(1-x)^2 k x^{k-1} = (k-1)x^{k-1} - kx^k + (k+1)x^{k+1} - kx^k + x^{k-1} - x^k + x^k - x^{k+1}.$$

- b) Retrouver avec la formule de la question 2.

Exercice 14 – Somme des premières puissances. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$.

- 1) Calculer $S_0(n)$.
- 2) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, développer $(k+1)^2 - k^2$. Retrouver la valeur de $S_1(n)$.
- 3) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, développer $(k+1)^3 - k^3$. Retrouver la valeur de $S_2(n)$.
- 4) En généralisant cette méthode, déterminer une formule close pour $S_3(n)$ et $S_4(n)$.
On pourra remarquer que l'on peut factoriser $S_4(n)$ par $n(n+1)(2n+1)$.

Exercice 15 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

- 1) Déterminer le signe du trinôme du second degré $t \mapsto \sum_{i=1}^n (|x_i| + t|y_i|)^2$ de deux façons différentes.
- 2) En déduire que

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \geq \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 16. (★★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{4n+3}{6} \sqrt{n}$.

Exercice 17. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i, & 4) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j), & 7) \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ |i-j|=1}} ij, & 10) \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2^{\min(i,j)}, \\ 2) \sum_{1 \leq i < j \leq n} j^2, & 5) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j), & 8) \sum_{1 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{1+\ell}, & 11) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{1}{2^{|i-j|}}, \\ 3) \sum_{1 \leq p, q \leq n} n^{p+q}, & 6) \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} ij, & 9) \sum_{0 \leq i, j \leq n} \max(i, j), & 12) \sum_{0 \leq i < j < k \leq n} j. \end{array}$$

Exercice 18. (★★) Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant la somme double $\sum_{0 \leq j < k \leq n} x^{k-1}$, retrouver le résultat sur les sommes géométriques dérivées de l'exercice 13.

Exercice 19 – Autour des nombres harmoniques. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ième}}$ nombre harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il n'en existe pas de forme close.

- 1) Soit $n \geq 2$. Exprimer la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et de H_n .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^n H_k$ en fonction de n et de H_n .

Exercice 20. (★★★) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit P une application polynomiale sur $\mathbb{C}$ qui est de degré d . On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ est tel que $P(a) = 0$. Montrer qu'il existe une application polynomiale Q sur $\mathbb{C}$ de degré $d-1$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z-a)Q(z).$$

On remarquera que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = P(z) - P(a)$ et on utilisera la formule de factorisation de $z^k - a^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad z_k = \lambda_k z_1.$$

Autrement dit, l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les points d'affixes $z_1, \dots, z_n$ sont sur une même demi-droite d'origine O .

II Produits

Exercice 22. (★★) Soient $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Calculer les produits suivants :

$$\begin{array}{llll} 1) \prod_{i=0}^n (i+2), & 4) \prod_{\ell=1}^n \ell^2 (\ell+1)^3, & 7) \prod_{i=1}^n 2^{1-i^2}, & 10) \prod_{p=1}^n \left(\sum_{k=0}^p 2^{p \times k} \right), \\ 2) \prod_{j=1}^n (j-1), & 5) \prod_{i=3}^n (i^2-1), & 8) \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right), & 11) \prod_{k=p}^n x^k, \\ 3) \prod_{k=1}^n (n+k), & 6) \prod_{k=1}^n \frac{2k+5}{2k+7}, & 9) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k, & 12) \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - k \right). \end{array}$$

Exercice 23. (★★) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=0}^n (x^{2^k} + 1) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}.$$

Exercice 24. (★★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{4k+3} \right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}.$$

Exercice 25. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$. En déduire la valeur de $\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Exercice 26. (★) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Calculer le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

III Formule du binôme de Newton

Exercice 27. (★) A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 28. (★) Quel est le coefficient de $x^7 y^3 z^2$ dans $(x+2y+3z)^{12}$?

Exercice 29. (★) Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$1) S_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{1-k} \quad 2) T_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{n}{p} k^p.$$

Exercice 30 – Formule de Pascal généralisée. (★) Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^n \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 31 – Inégalité de Bernoulli. (★) Montrer (sans avoir recours à un raisonnement par récurrence) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Exercice 32. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 33. (★★)

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{3n+3} \geq 4.$$

2) Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n (n!)^3 < (n+1)^{3n}$.

Exercice 34. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$.

Exercice 35. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du complexe $(1+i)^{2n}$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice 36. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$1) \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k, \quad 2) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}, \quad 3) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k \binom{n}{k}, \quad 4) \sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{j-1}{i} 2^i.$$

Exercice 37. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^7(x)$ et factoriser $\sin(9x)$.

Exercice 38. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, écrire $\sin(9x)$ sous la forme d'une fonction polynomiale en $\sin(x)$.

Exercice 39. (★★) Soient $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx), \quad 2) \sum_{k=1}^{2022} \binom{2022}{k} j^k, \quad 3) (\star\star\star) \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z + \omega)^n.$$

Exercice 40 – Formule de Vandermonde. (★★★) Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r \in \llbracket 0; p+q \rrbracket, \quad \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k}.$$

La somme peut s'arrêter, au choix, à r ou à p . Pourquoi ?

2) Donner une démonstration par récurrence (sur p par exemple) de cette égalité.

Exercice 41 – Formule d'inversion de Pascal. (★★★)

1) Montrer que, pour tous entiers k, j et n vérifiant $0 \leq k \leq j \leq n$,

$$\binom{n}{j} \binom{j}{k} = \binom{n}{j} \binom{n-k}{n-j}.$$

2) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j.$$

Systèmes linéaires

Exercice 1. (★) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues réelles :

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} &= \frac{5}{2} \\ \frac{x}{3} + \frac{5y}{3} + \frac{3z}{2} &= \frac{7}{2} \\ \frac{x}{3} - \frac{4y}{3} - \frac{11z}{6} &= -\frac{1}{2} \end{cases} & \quad 4) \begin{cases} x - 2y + 4z &= 1 \\ 3x - y - z - 2t &= 0 \\ -5x &+ 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z &= -1 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} & 3y - 4z &= -7 \\ 5x &+ 2z &= 4 \\ -2x - y &&= 3 \end{cases} & \quad 5) \begin{cases} \frac{x}{5} + y - z &= \frac{1}{3} \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{3} &= -\frac{1}{2} \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2x &+ 5z &= 2 \\ x + y + z &= 3 \\ & 4y - 6z &= 8 \\ -x - 3y + 2z &= -7 \end{cases} & \quad 6) (\star\star) \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u &= -3 \\ 3x + 5y + z &- 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u &= 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u &= 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u &= -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2. (★★) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues complexes :

$$1) \begin{cases} ix + 2y + (1+i)z &= 2-i \\ 2x &+ iz = 1+2i \\ -x + 2iy + 2z &= -i \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + (1+i)z &= 1+3i \\ 3x - (1-i)y + 2z &= 3+4i \\ -2x - iy - (1-i)z &= -2-i \end{cases}$$

Exercice 3. (★)

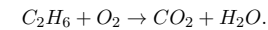
- On cherche une application polynomiale P de degré 3 vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Une telle application polynomiale existe-elle ? Est-elle unique ?
- Même question avec P de degré au plus 4 vérifiant, pour tout $k \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, $P(k) = k$

Exercice 4. (★) On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1; 3\}, \quad \frac{5x^2 + 2x - 1}{x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

Exercice 5 – Un peu de chimie. (★★) Équilibrer l'équation chimique



Il faut placer un entier naturel (le plus petit possible) non nul devant chaque molécule de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation. L'équation ci-dessus traduit le fait que la combustion de l'éthane (éthane + dioxygène) produit du dioxyde de carbone et de l'eau.

Exercice 6. (★★) Soient $\lambda, \rho, \alpha, \beta$ des réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} z &= \lambda x \\ y &= \lambda y \\ x &= \lambda z \end{cases} & \quad 3) \begin{cases} \rho x + y + z &= -1 \\ x + \rho y + z &= 0 \\ x + y + \rho z &= 1 \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x &- z = \lambda x \\ 2x + 4y + 2z &= \lambda y \\ -x &+ 3z = \lambda z \end{cases} & \quad 4) (\star\star\star) \begin{cases} \alpha x + \beta y + z &= 1 \\ x + \alpha \beta y + z &= \beta \\ x + \beta y + \alpha z &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 7. (★★★)

1) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Donner le nombre de solutions éventuelles du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= a_1 \\ x_2 + x_3 &= a_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= a_{n-1} \\ x_n + x_1 &= a_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ appartenant à $\mathbb{C}$.

2) On se donne n points du plan $A_1, \dots, A_n$. Existe-t-il un polygone à n côtés tel que les A_i soient les milieux des n côtés de ce polygone ?

Feuille d'exercices n° 9

Décomposition en éléments simples

Exercice 1. (★) Effectuer la division euclidienne de :

- 1) $A : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B : x \mapsto 2x^2 + x - 1$.
 2) $A : x \mapsto x^6 + x^5 + 4x^2 - 3x - 9$ par $B : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Exercice 2. (★) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

- 1) $f : x \mapsto \frac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3}$.
 2) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.
 3) $f : x \mapsto \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$.
 4) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3x(x-1)}$.

Exercice 3. (★) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z^2}{(z-i)^2(z+2i)(z-1)}.$$

Exercice 4. (★★) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^7}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Exercice 5. (★) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Décomposer en éléments simples la fonction

$$f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Exercice 6. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

- 1) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$. 2) $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$, 3) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$,

Exercice 7. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Calcul intégral

I Calculs « directs » de primitives et d'intégrales

Dans ce paragraphe, tout doit être calculé sans avoir recours ni à un changement de variable, ni à une intégration par parties.

Exercice 1. (★) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $x \mapsto \frac{2x^4}{3} - \frac{x}{5} + 1,$ | 9) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{2x},$ | 18) $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}(x)}},$ |
| 2) $x \mapsto \frac{1}{(7x-1)^{2026}},$ | 10) $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2(x))},$ | 19) $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}},$ |
| 3) $x \mapsto x^2 e^{-4x^3},$ | 11) $x \mapsto \sqrt{x^2+x^4},$ | 20) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}},$ |
| 4) $x \mapsto \frac{ax}{c+dx}$
avec $(a, c, d) \in (\mathbb{R}^*)^3,$ | 12) $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x}},$ | 21) $x \mapsto \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin}(x)}{1-x^2}},$ |
| 5) $x \mapsto \frac{1+x}{\sqrt[17]{5+2x+x^2}},$ | 13) $x \mapsto 1 - \sin(3-2x),$ | 22) $x \mapsto x e^{ix^2},$ |
| 6) $x \mapsto \exp(x + e^x),$ | 14) $x \mapsto \cos^5(x) \sin(x),$ | 23) $x \mapsto \sin(3x) e^{-2x},$ |
| 7) $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^{2026}},$ | 15) $x \mapsto \tan^2(x),$ | 24) (★★) $x \mapsto \operatorname{ch}(x) \sin(x),$ |
| 8) $x \mapsto 2^x,$ | 16) $x \mapsto \tan(x) + \tan^3(x),$ | 25) (★★) $x \mapsto x .$ |
| | 17) $x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$ | |

Exercice 2. (★) Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1) $\int_e^{2e} \ln(a) da,$ | 5) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)} dz,$ |
| 2) $\int_1^2 \frac{3}{1-4v} dv,$ | 6) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} (\cos^5(y) + 4\cos^3(y) - 7) \sin(y) dy,$ |
| 3) $\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (3e^{-\frac{x}{4}} + 1)^2 dx,$ | 7) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$ |
| 4) $\int_1^2 e^u \left(\frac{1}{u} + \ln(u) \right) du,$ | 8) $\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{9-t^2}} dt.$ |

Exercice 3. (★) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $t \mapsto \cos(\alpha t) \cos(\beta t),$ | 2) $t \mapsto \cos(\alpha t) \sin(\beta t),$ | 3) $t \mapsto \sin(\alpha t) \sin(\beta t).$ |
|--|--|--|

Exercice 4. (★) Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------|---------------------|
| 1) $\sin^3,$ | 2) $\cos^4,$ | 3) $\sin^5,$ | 4) $\cos^6,$ | 5) $\cos^3 \sin^2,$ | 6) $\sin^4 \cos^2.$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------|---------------------|

Exercice 5. (★) Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|--------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\int_{-3}^4 \frac{ x-1 }{ x +1} dx,$ | 2) $\int_0^n \sum_{k=0}^n x-k dx,$ | 3) $\int_{-1}^1 e^{- u } du.$ |
|--|--------------------------------------|-------------------------------|

Exercice 6. (★) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{\ln(3 + \cos(\tan(x)))} dx.$

Exercice 7. (★★) Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant les réciproques de sh et ch (cf. exercice 28 du TD n° 4).

II Intégrales et primitives de fonctions rationnelles

Exercice 8. (★) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

- | | | |
|---|---------------------------------------|---|
| 1) $x \mapsto \frac{4}{4+x^2},$ | 5) $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+5},$ | 9) $x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+9},$ |
| 2) $x \mapsto \frac{3}{7+2x^2},$ | 6) $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1},$ | 10) $x \mapsto \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)},$ |
| 3) $x \mapsto \frac{5x}{1+2x^4},$ | 7) $x \mapsto \frac{6x}{x^4+4x^2+13}$ | 11) $x \mapsto \frac{9}{x(x^2-9)},$ |
| 4) $x \mapsto \frac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*,$ | 8) $x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2},$ | 12) $x \mapsto \frac{1}{x^3+1},$ |

Exercice 9. (★) Calculer les intégrales suivantes :

- | | | | |
|----------------------------------|--|---|--|
| 1) $\int_0^1 \frac{t}{2t+3} dt,$ | 3) $\int_{-1}^0 \frac{dt}{5+3t^2},$ | 5) $\int_3^5 \frac{8}{t(t^2-4)} dt,$ | 7) $\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1} dt,$ |
| 2) $\int_2^4 \frac{dt}{t^2-1},$ | 4) $\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2} dt,$ | 6) $\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1} dt,$ | 8) $\int_0^1 \frac{dt}{9t^2+6t+5}.$ |

Exercice 10. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

- | | |
|---|---|
| 1) (★★) $x \mapsto \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2},$ | 3) (★★★) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2+x^4},$ |
| 2) (★★) $x \mapsto \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2},$ | 4) (★★★) $x \mapsto \frac{4}{(x+1)(x^2+4x+5)^2}.$ |

III Calculs avec intégration par parties

Exercice 11. (★ à ★★★) A l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\operatorname{Arctan},$ | 6) $x \mapsto \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}},$ | 9) $x \mapsto x^2 e^x \sin(x),$ |
| 2) $\operatorname{Arcsin},$ | 7) $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R},$ | 10) $x \mapsto x (\operatorname{Arctan}(x))^2,$ |
| 3) $\operatorname{Arccos},$ | 8) $x \mapsto \frac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}},$ | 11) $x \mapsto \frac{x \ln(x)}{(x^2+1)^2}.$ |
| 4) $x \mapsto \cos(\ln(x)),$ | | |
| 5) $x \mapsto \operatorname{ch}(x) \sin(x),$ | | |

Exercice 12. (★ à ★★★) A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(3x) dx,$ | 3) $\int_1^e \ln^2(w) dw,$ | 5) $\int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin}(t))^2 dt,$ |
| 2) $\int_0^1 a^3 e^{-\frac{a^2}{2}} da,$ | 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) e^{\cos(t)} dt,$ | 6) $\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)} dx.$ |

IV Calculs avec changement de variable

Exercice 13. (★ à ★★) Avec un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

- 1) $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ (avec $u = e^{\sqrt{t}}$)
- 2) $x \mapsto \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}$.
- 3) $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^3}}{x}$ (avec $u = \sqrt{1+t^3}$),
- 4) $x \mapsto \tan^4(x)$ (avec $u = \tan(t)$),

Exercice 14. (★★) Déterminer des primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant les changements de variable $u = \sqrt{t^2+1} + t$ et $u = \sqrt{t^2-1} + t$ respectivement.

Exercice 15. (★ à ★★) Avec un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_3^4 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$ (avec $t = 1+x^2$),
- 2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x) \cos^3(x) dx$,
- 3) $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$,
- 4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ (avec $x = \cos(2t)$),
- 5) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$,
- 6) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Exercice 16. (★★ à ★★★) Donner une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

- 1) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \tan(x)}$.
- 2) $x \mapsto \frac{\tan(x)}{3 + \sin(x)}$.
- 3) $x \mapsto \frac{1}{\sin(x) + \sin(2x)}$.
- 4) $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$.
- 5) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$.
- 6) $x \mapsto \frac{1}{3 - 2 \sin(x)}$.

Exercice 17 – Propriété du roi. (★) Soient a et b deux réels. Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ et à valeurs complexes. Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt.$$

Exercice 18. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la propriété du roi (cf. exercice 17), calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(t)}{\sin^n(t) + \cos^n(t)} dt.$$

Exercice 19 – Intégrale de Serret. (★★) A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$ et de la propriété du roi (cf. exercice 17), calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt.$$

V Fonctions et suites définies à l'aide d'intégrales

Exercice 20. (★) Dans cet exercice, on fait semblant de ne pas connaître la fonction $\ln$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction

$$L : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Montrer que pour tous x et y strictement positifs, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Exercice 21. (★★) Soit $T > 0$. Soit f une fonction continue et T -périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exercice 22. (★★) Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \int_{1/x}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$.

- 1) Montrer que φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
- 2) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
- 3) Montrer que la fonction $\psi : x \mapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 4) En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23. (★★) Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale $I_a = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$

- 1) en dérivant la fonction qui à $a \in \mathbb{R}_+^* \mapsto I_a$ associe cette intégrale.
- 2) à l'aide du changement de variable $x = 1/t$.
- 3) en faisant des intégrations par parties successives.

Exercice 24. (★★) Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I(p, q) = \int_{-1}^1 (t-1)^p (t+1)^q dt$ en fonction de p et q .

VI Propriétés des intégrales

Exercice 25. (★) En utilisant la propriété de croissance de l'intégrale, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

Exercice 26. (★) Prouver que

$$\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{x} dx \leq \sqrt{3} \ln(2).$$

Exercice 27. (★) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{-nt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 – Équations du premier ordre. (★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y' - 2y = -7$,
- 3) $y' - \frac{2}{x}y = x^3$,
- 5) $y' + \cos(x)y = \sin(2x)$,
- 2) $y' + y = x^2$,
- 4) $y' - \frac{y}{x^2} = 2x - 1$,
- 6) $y' - \operatorname{th}(x)y = \operatorname{sh}(x)$.

Exercice 2 – Équations du premier ordre. (★★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $(1 - x^2)y' + xy = -3x$,
- 3) $y' \cos(x) - y \sin(x) = \sin(2x)$,
- 2) $x(1 + x^2)y' + y = -x$,
- 4) $x \ln(x)y' - y = 2x^2(\ln(x))^2$,

On donnera l'ensemble des solutions sur chaque intervalle où la fonction « devant y' » ne s'annule pas. On ne cherchera pas à étudier les « recollements » de solutions mais on pourra reprendre cet exercice dans le chapitre 19.

Exercice 3. (★) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

- 1) $\begin{cases} y' + 3y = \sin(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} y' + 2xy = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Exercice 4 – Équations du second ordre. (★) Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $y'' - y' - 6y = x^2 - x + 5$,
- 6) $y'' + 3y' + 4y = \operatorname{sh}(2x)$,
- 2) $y'' + 9y = 3x^2 + 2$,
- 7) $y'' + 3(1 - i)y' - 5iy = 4ie^{ix}$,
- 3) $y'' - y = 3\cos(x)$,
- 8) (★★) $y'' + \omega^2 y = \sin^3(x)$,
- 4) $y'' - 2y' + y = e^x + \cos(3x)$,
- 9) (★★★) $y'' - 2y' \cos(\alpha) + y = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 5) $y'' + 4y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$,

À part pour la question 7, on ne cherchera que les solutions à valeurs réelles.

Exercice 5. (★) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 – Une équation différentielle d'ordre 3. (★★) On cherche les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $(E) : y''' = y$.

- 1) Donner l'ensemble des solutions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(F) : y' = y$.
- 2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F) .
- 3) En déduire les solutions de (E) .

Exercice 7. (★) Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 8. (★) Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » :

$$\begin{cases} f'' &= f' + g' - g \\ g'' &= f' + g' - f \end{cases}$$

On pourra s'intéresser aux fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.

Exercice 9. (★★)

- 1) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du second ordre, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- 2) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du premier ordre, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice 10. (★★★)

- 1) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du second ordre, trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x - t)f(t) dt.$$

- 2) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du premier ordre, trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x) + 2 \int_0^x e^{x-t} f(t) dt.$$

Exercice 11 – Une EDL du second ordre à coefficients non constants. (★★★) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y''(x) - 2x y'(x) + 2y(x) = (x - 1)^2.$$

On pourra commencer par montrer qu'une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $z : t \mapsto y(e^t)$ est solution d'une EDL du second ordre à préciser.

Exercice 12 – Une équation différentielle non linéaire. (★★) Considérons l'équation différentielle $(E) : -x^2 y' + xy = y^2$ sur $I =]1; +\infty[$. En procédant au changement de fonction inconnue $z = \frac{1}{y}$, déterminer les solutions qui ne s'annulent pas sur I .

Exercice 13 – Une équation différentielle non linéaire. (★★) À l'aide du changement de fonction inconnue $z = y^2$, résoudre l'équation différentielle $(E) : yy' + y^2 = \frac{e^{-2x}}{2}$.

Exercice 14. (★) Montrer que toute solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ou du second ordre à coefficients constants est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 15. (★★) Soient a et b des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que a est impaire sur $\mathbb{R}$ et que b est paire sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

- 1) Soit f une solution de (E) . Montrer que $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution de (E) .
- 2) En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Exercice 16. (★★) Soit $T > 0$. Soient a et b deux fonctions continues T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Montrer qu'une solution y de (E) est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Exercice 17 – Méthode de variation de la constante pour les EDL du second ordre. (★★) Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Considérons $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$. Soit r un complexe vérifiant $r^2 + ar + b = 0$. Déterminer une solution de (E) qui s'écrit sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{rx}$, avec λ deux fois dérivable sur I .

Arithmétique des entiers

I Divisibilité

Exercice 1. (★) Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 2. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux. Simplifier $(n + 1) \binom{2n+1}{n+1}$ et en déduire que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 3. (★) Soit n un entier naturel se terminant par 5. Notons p le nombre formé par les chiffres de n à l'exception du chiffre des unités. Montrer que n^2 est l'entier naturel terminant par 25 et dont les chiffres précédents sont $p(p + 1)$.

Exercice 4. (★) Pour quelles valeurs de $a \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ le nombre d'écriture décimale $123a4$ est-il divisible par 12 ?

Exercice 5. (★) Soit $n \geq 2$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors n est la puissance 6-ième d'un entier.

Exercice 6. (★) Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 7. (★★) Soient a et b deux entiers naturels.

- 1) Montrer que si a^2 divise b^2 alors a divise b .
- 2) Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré, alors a et b sont des carrés. Le résultat est-il encore vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?
- 3) Généraliser au cas d'une puissance $k^{\text{ième}}$ avec $k \geq 2$. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs non nuls n'est jamais une puissance $k^{\text{ième}}$.

Exercice 8. (★★) Notons $\theta = \frac{2\pi}{7}$. En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\theta)$ est irrationnel.

Exercice 9. (★★) Soit p premier et soit $k \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$. Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 10. Montrer que, si p est un nombre premier supérieur ou égale à 5, alors p divise $\sum_{k=1}^{p-1} k^2$.

Exercice 11 – Unicité de l'écriture en base b . (★★) Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $r_0, \dots, r_k, s_0, \dots, s_\ell$ des entiers naturels strictement inférieurs à b tels que

$$\sum_{i=0}^k r_i b^i = \sum_{i=0}^{\ell} s_i b^i.$$

Montrer que $k = \ell$ et que, pour tout $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $r_i = s_i$.

II Congruences

Exercice 12. (★) Quel est le chiffre des unités de 1789^{1789} ? de 1515^{1515} ? de 2022^{2022} ? de $2027^{2025^{2026}}$?

Exercice 13. (★) Donner les deux derniers chiffres de $S = \sum_{k=0}^{2026} k!$.

Exercice 14. (★) Montrer que 7 divise $3^{105} + 4^{105}$.

Exercice 15. (★) Montrer que, pour tout n impair, $n(n^2 - 1)$ est divisible par 24.

Exercice 16. (★) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Exercice 17. (★) Résoudre l'équation $3x \equiv 4[7]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18. (★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- 1) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- 2) $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ est divisible par 17.
- 3) $2^{4^n} + 5$ est divisible par 21.
- 4) $n^{2027}(n^{2026} - 1)$ est divisible par 8.

Exercice 19. (★) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^7 \equiv n[42]$.

Exercice 20. (★) Soient $n \geq 1$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b[n]$, alors $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 21. (★) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que si 7 divise $a^3 + b^3 + c^3$ alors 7 divise abc .

Exercice 22. (★) Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Exercice 23. (★) Montrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{21n-3}{4}$ et $\frac{15n-2}{4}$ soient entiers.

Exercice 24. (★★) Montrer que, parmi les 101 dalmatiens, on peut en choisir 11 tels que le nombre total de leurs taches est un multiple de 11.

Exercice 25. (★★) Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a^k \equiv 1[b]$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe un multiple de 2027 qui ne s'écrit qu'avec des 1. Et pour 2025 ? 2026 ?

Exercice 26. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n puissances de 10 distinctes ayant la même congruence modulo n . En déduire qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1 et des 0 en écriture décimale.

Exercice 27. (★★) Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe $a_{k+1}, \dots, a_l$ entiers consécutifs (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de n .

Exercice 28. (★★) On se donne 2026 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances 37ièmes est divisible par 399.

Exercice 29 – Nombres de Fermat. (★★★)

- 1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$.

- 2) Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

On admet que $F_4 = 65537$ est un nombre premier.

- 3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

- b) En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter les deux derniers chiffres de F_n selon la valeur de n .

5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un facteur premier de F_n .

- a) Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^k \equiv 1[p]\}$ admet un plus petit élément noté d .
- b) Montrer que tout élément de E est divisible par d .
- c) En déduire que $d = 2^{n+1}$.
- d) Montrer que $p \equiv 1[2^{n+1}]$. Pourquoi était-il naturel pour Euler d'essayer 641 lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5 ?
- e) Montrer que, en effet, $641 \mid F_5$.

A ce jour, on sait que, pour tout $n \in \llbracket 5; 32 \rrbracket$, F_n n'est pas premier. On sait que d'autres ne le sont pas non plus, comme F_{73} . Mais on ne sait pas s'il existe d'autres nombres premiers parmi les F_n , $n \geq 33$.

Exercice 30. (★★★) Donner la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444} .

III Équations diophantiennes

Exercice 31. (★) Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 32. (★) En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation diophantienne $x^2 - 2y^2 = 3$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, n'a pas de solution.

Exercice 33. (★★) Résoudre l'équation $5x - 3y + 8z = 1$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

Exercice 34. (★★) Montrer, en raisonnant modulo 3, que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, n'a que $(0, 0, 0)$ pour solution.

IV PPCM et PGCD

Exercice 35. (★) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 36. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le PGCD de $n! + 1$ et de $(n+1)! + 1$.

Exercice 37. (★) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $28 \vee n = 140$.

Exercice 38. (★) Donner $9100 \wedge 1848$.

Exercice 39. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $n^3 + 2n \wedge n^4 + 3n^2 + 1$.

Exercice 40. (★★) Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 41. (★)

- 1) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 4373 et 826 par n donnent pour restes 8 et 9.
- 2) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 6381 et 3954 par n donnent pour restes 9 et 6.

Exercice 42. (★★) Soient M et m deux entiers naturels non nuls. Donner une CNS sur M et m pour qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$.

Exercice 43. (★) Montrer que, pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à 2, $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$.

Exercice 44 – Éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

- 1) Montrer que $\{\omega^p \mid p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ premier avec n tel que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
- 2) En déduire que $\{\omega^p \mid p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ premier avec n tel que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

V Valuation p -adique

Exercice 45. (★) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 5544. Et de 360000000000.

Exercice 46. (★★) Quel est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs ?

Exercice 47. (★) Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Exprimer la décomposition en produit de facteurs premiers du plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que b divise an ?

Exercice 48. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_2(5^{2^n} - 1) = n + 2$.

Exercice 49 – Formule de Legendre. (★★★) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $p \in \mathbb{P}$.

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\text{card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid v_p(i) = k\})$.
- 2) Montrer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Cette somme n'est pas infinie en fait puisque $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ dès que k est tel que $p^k > n$.

- 3) Par combien de zéros l'entier $2026!$ s'achève-t-il ?

VI Nombres premiers

Exercice 50. (★) Les nombres 1, 11, 111, 1111 et 111111 sont-ils premiers ?

Exercice 51 – Nombres premiers jumeaux. (★★)

- 1) Soit $p \geq 5$ (pas forcément premier). Montrer que parmi p , $p+2$ et $p+4$, il y a au moins un multiple de 3.

Il en découle que p , $p+2$ et $p+4$ ne peuvent pas être tous les trois premiers. Cependant, il n'y a aucune raison pour que p et $p+2$ (ou $p+2$ et $p+4$) ne soient pas premiers tous les deux : deux nombres premiers p et q tels que $|p-q| = 2$ sont dits jumeaux. C'est le cas par exemple de 3 et 5, de 5 et 7, de 11 et 13, de 17 et 19 etc.

- 2) Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'ils sont jumeaux si et seulement si $pq+1$ est un carré.
- 3) Montrer que, si p et q sont premiers jumeaux et supérieurs ou égaux à 5, alors $p+q$ est divisible par 12.

Exercice 52 – Produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n . (★★★)

- 1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{2m+1}{m}\right) \leq 4^m$.
- 2) Soit p un nombre premier vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$. Montrer que p divise $\left(\frac{2m+1}{m}\right)$. En déduire que

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$$

où le produit ne porte que sur les nombres premiers.

- 3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$.

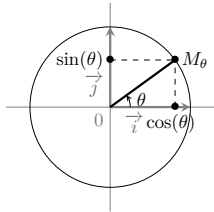
Exercice 53 – Théorème de Wilson. (★★★)

- 1) Soit $p \geq 2$ un nombre premier.
 - a) Montrer que pour tout $x \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, il existe un unique élément de $\llbracket 1; p-1 \rrbracket$ que l'on notera $f(x)$ tel que $x \times f(x) \equiv 1[p]$. Expliciter $f(f(x))$.
 - b) Soit $x \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$. Donner le cardinal de $\{x; f(x)\}$.
 - c) Soit $(x, y) \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket^2$. Montrer que les ensembles $\{x; f(x)\}$ et $\{y; f(y)\}$ sont soit disjoints soit égaux.
 - d) Montrer finalement que $(p-1)! \equiv -1[p]$.
- 2) Soit $n \geq 5$ composé. Montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
- 3) Nous avons donc montré le théorème de Wilson : un entier $p \geq 5$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$. Ce critère de primalité présente-t-il un intérêt pratique ?
- 4) Si $n \geq 2$, on note $g(n)$ le plus petit nombre strictement positif congru à $2+2n!$ modulo $n+1$. Montrer que $\{g(n) \mid n \geq 2\} = \mathbb{P}$.

Annexe – Formulaire de trigonométrie

Dans la suite θ , x , a et b désignent des réels.

Cercle trigonométrique.



Identité fondamentale.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Valeurs usuelles.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
$\sin(\theta)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Arcs associés.

Tour complet $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$	Demi-tour $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$
Angles opposés $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$	Angles supplémentaires $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
Angles complémentaires $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$	Quart de tout direct $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$ $\sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$

Résolution d'équations.

$$\begin{aligned} \cos(x) = \cos(a) &\iff \begin{cases} x \equiv a [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -a [2\pi] \end{cases} \\ \sin(x) = \sin(a) &\iff \begin{cases} x \equiv a [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - a [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Formules d'addition.

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Formules de duplication.

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \cos(a) \sin(a) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2 \cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(a) \end{aligned}$$

Formules de l'angle triple.

$$\begin{aligned} \cos(3a) &= -3 \cos(a) + 4 \cos^3(a) \\ \sin(3a) &= 3 \sin(a) - 4 \sin^3(a) \end{aligned}$$

Formules de linéarisation.

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) &= -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b)) \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos^2(a) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \\ \sin^2(a) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) \end{aligned}$$

Formules de factorisation.

$$\begin{aligned} \cos(a) + \cos(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) + \sin(b) &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Formule de Moivre. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules d'Euler.

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Méthode de l'angle-moitié.

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} (e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}) \\ &= 2 e^{i\frac{a+b}{2}} \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ e^{ia} - e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} (e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}}) \\ &= 2i e^{i\frac{a+b}{2}} \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Formules pour la tangente. Supposons que a et b n'appartiennent pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \tan(a+\pi) &= \tan(a) \\ \tan(-a) &= \tan(\pi-a) \\ &= -\tan(a) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{si } a+b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} \quad \text{si } a-b \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \quad \text{si } 2a \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ \frac{1}{\cos^2(a)} &= 1 + \tan^2(a) \end{aligned}$$

Si $\frac{a}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors :

$$\begin{aligned} \tan(a) &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \sin(a) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(a) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

