Feuille d'exercices n° 5

Trigonométrie

I Formules de trigonométrie et équations trigonométriques

Exercice 1. (★) Donner une valeur de

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Exercice 2. (★★) Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $2\cos(4x+\pi) = 1$,
2) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$,
3) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0$,
4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3}\sin(5x)$,
5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$,
6) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}$.
7) $2\sin(x) \leqslant -1$.
8) $\sin^2(x) + 3\cos(x) < 1$.

Pour les questions 7 et 8, on pourra s'aider d'un dessin. Mais, pour justifier correctement, on se ramènera à des cas de positivité de cosinus ou sinus.

Exercice 3. (★★) Résoudre l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. (★★) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre l'équation $a\cos(x) + b\sin(x) = c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (★★) Résoudre l'équation $2\sin(x) + 3\cos(x) = 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. (★) Soient $n \geqslant 2$ et $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.

Exercice 7. (★★) Donner la valeur de $\alpha = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$.

II Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 8. (★) Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions $x \longmapsto 1 + \sin(2x)$ et $x \longmapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 9. (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression de la dérivée).

1) $x \longmapsto (1+x^2)e^{\mathrm{Arctan}(x)}$,
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Arcsin}(x)}}$,
3) $x \longmapsto \cos(\sin^2(x))$,
4) $x \longmapsto \ln\left(1 + \cos(\pi x^2)\right)$,
5) $x \longmapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,
6) $x \longmapsto \ln(\cos(x) - 1)$,
7) $x \longmapsto \dfrac{\ln(2+\cos(x))}{\exp(\tan(x))}$,
8) $x \longmapsto \mathrm{Arccos}\left(4x^2 - \frac{3}{x^2}\right)$,
9) $x \longmapsto \sqrt[5]{x}e^{\sin(\ln(x))}$,
10) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{Arctan}(\mathrm{Arctan}(x)))$,
11) $x \longmapsto (\cos(x))^{\sin(x)}$,
12) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,
13) $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arccos}(x)\right)$,
14) $x \longmapsto \sqrt{3\cos(x) + 4\sin(x)}$.

On ne cherchera pas à déterminer la dérivabilité en un point du domaine de définition où les théorèmes généraux d'opérations n'ont pas permis de conclure (on réserve cela pour le TD n° 22).

Exercice 10. (★) Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(x^2\right)e^{-x}$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2+\sin(x))x$,

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-\cos(x)}$,

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sin(x)}{(x+1)^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\operatorname{Arctan}(x)}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arcsin}(x)}{x}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arccos}(x)}{x}$,

Exercice 11. (★ à ★★) Étudier (domaine de définition, variations, limites, éventuelles asymptotes, branches paraboliques, convexité, courbes) les fonctions suivantes.

1) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$,

2) $x \longmapsto x\operatorname{Arccos}(x)$,

3) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right)$,

4) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(1-x^3\right)$,

5) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x^2\ln(x))$,

6) $x \longmapsto \operatorname{Arccos}(x)\operatorname{Arcsin}(x)$.

Exercice 12. (★) Montrer que chacune des fonctions suivantes est périodique sur son domaine de définition.

1) $x \longmapsto \sin(7+6x)$,

2) $x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{5x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$,

3) $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{2x}{43}\right)+\sin\left(\dfrac{2x}{47}\right)$.

Exercice 13. (★★★) Déterminer deux fonctions périodiques dont la somme n'est pas périodique.

Exercice 14. (★★) Montrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x-\dfrac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$,

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x-\dfrac{x^3}{3} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$.

Exercice 15. (★★) Sans utiliser d'arguments de convexité, montrer que :

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

Exercice 16. (★★)

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ réalise une bijection de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

2) Étudier la dérivabilité de f^{-1} et exprimer sa dérivée.

Exercice 17. (★★) Donner le nombre de solutions de l'équation $\sin(x)=\ln(x)$.

Exercice 18. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

Exercice 19. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)=\operatorname{Arctan}(1+x)-\operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 20. (★★) Calculer $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$ pour tout réel x.

Exercice 21. (★★) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier (quand elles ont un sens) les expressions suivantes :

$$f(x)=\tan(2\operatorname{Arctan}(x)), \qquad g(x)=\cos(4\operatorname{Arctan}(x)) \qquad \text{et} \qquad h(x)=\sin(3\operatorname{Arctan}(x)).$$

Exercice 22. (★★) Soit $x \in [0\,;1]$. Simplifier l'expression $\operatorname{Arcsin}(x)+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 23. (★★) Montrer les égalité suivantes :

1) $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right)+\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{4}{5}\right)+\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{16}{65}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2) $\operatorname{Arctan}(1)+\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(3)=\pi$.

Exercice 24. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x\sqrt{3}) = \dfrac{7\pi}{12}$.

2) $\sin(2\,\mathrm{Arccos}(2\,\mathrm{Arctan}(x))) = 0$.

Exercice 25. (★★)

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2) Soient x et y des réels tels que $xy \neq 1$. Montrer que

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(y) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

où $k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy < 1 \\ 1 & \text{si} \quad xy > 1,\ x > 0,\ y > 0 \\ -1 & \text{si} \quad xy > 1,\ x < 0,\ y < 0 \end{cases}$.

3) Montrer la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Exercice 26. (★★) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \times \mathrm{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Exercice 27. (★★) On introduit les fonctions

$$f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x).$$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).

2) Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.

3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Exercice 28. (★★★) En s'inspirant de l'exercice précédent, simplifier et tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{Arccos}\left(4x^3 - 3x\right)$.

Exercice 29 – Coordonnées cartésiennes et polaires. (★) Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit M un point du plan qui n'est pas O. Notons (x, y) ses coordonnées cartésiennes et (r, θ) ses coordonnées polaires (c'est-à-dire que l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure θ et que la longueur OM vaut r).

1) Montrer que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

2) Montrer que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta \equiv \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & [2\pi] \quad \text{si} \quad x > 0 \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) & [2\pi] \quad \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & [2\pi] \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.