Feuille d'exercices n° 8

Systèmes linéaires

Exercice 1. (★) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues réelles :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) (★★) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

Exercice 2. (★★) Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnues complexes :

1) $\begin{cases} ix + 2y + (1+i)z = 2-i \\ 2x + iz = 1+2i \\ -x + 2iy + 2z = -i \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y + (1+i)z = 1+3i \\ 3x - (1-i)y + 2z = 3+4i \\ -2x - iy - (1-i)z = -2-i \end{cases}$

Exercice 3. (★)

1) On cherche une application polynomiale P de degré 3 vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un telle application polynomiale existe-elle ? Est-elle unique ?
2) Même question avec P vérifiant, pour tout $k \in [\![0\,;4]\!]$, $P(k) = k$

Exercice 4. (★) On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1;3\}, \qquad \frac{5x^2+2x-1}{x^4-3x^3-x^2+3x} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

Exercice 5 – Un peu de chimie. (★★) Équilibrer l'équation chimique

$$C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$$

Il faut placer un entier naturel (le plus petit possible) non nul devant chaque molécule de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation. L'équation ci-dessus traduit le fait que la combustion de l'éthane (éthane + dioxygène) produit du dioxyde de carbone et de l'eau.

Exercice 6. (★★) Soient $\lambda, \rho, \alpha, \beta$ des réels. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

1) $\begin{cases} z = \lambda x \\ y = \lambda y \\ x = \lambda z \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - z = \lambda x \\ 2x + 4y + 2z = \lambda y \\ -x + 3z = \lambda z \end{cases}$

3) $\begin{cases} \rho x + y + z = -1 \\ x + \rho y + z = 0 \\ x + y + \rho z = 1 \end{cases}$

4) (★★★) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

Exercice 7. (★★★)

1) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Donner le nombre de solutions éventuelles du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & a_1 \\ x_2 + x_3 & = & a_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} + x_n & = & a_{n-1} \\ x_n + x_1 & = & a_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à $\mathbb{C}$.

2) On se donne n points du plan $A_1, \ldots, A_n$. Existe-t-il un polygone à n côtés tel que les A_i soient les milieux des n côtés de ce polygone ?