Feuille d'exercices n° 7

Sommes et produits

I Sommes

Exercice 1. (★) Réexprimer les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1) $2+4+6+8+\cdots+104$,
2) $1+4+9+16+25+36+49+\cdots+361$,
3) $2+4+8+16+32+\cdots+1024$,
4) $1+2^7+3^6+4^5+5^4+6^3+7^2+8$,
5) $a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{19}-a_{20}$,
6) $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+\cdots+a_{30}a_{31}$,
7) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{4}+\cdots+\dfrac{x^{38}}{40}$.

Exercice 2. (★) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer la somme P_n des entiers pairs de 0 à $2n$ et la somme I_n des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Exercice 3. (★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{i=n}^{3n+1}2^{i+1}$,
2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sqrt{2^j}$,
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}2^{k/2}$,
4) $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n}\frac{7^j-2\cdot 3^{2j}}{5^j}$,
5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^{2k-1}$,
6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$,
7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$,
8) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}(n\ell-1)$,
9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$,
10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$,
11) (★★) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$,
12) (★★) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+\sqrt{k^2-1}}}$.

Pour la dernière somme, on utilisera l'exercice 5 du TD n° 3.

Exercice 4. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^kk$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^kk^2$.

Exercice 5. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lfloor\sqrt{k}\rfloor$.

Exercice 6. (★) Soient $x\in\,]-1\,;1[$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(ak+b)$
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(ak+b)$,
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k\sin(ak)$
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k\cos(ak)$.

Exercice 7. (★★) Soient $x\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ sans utiliser de nombres complexes mais en commençant par les multiplier par $2\sin(\frac{x}{2})$ puis en utilisant des sommes télescopiques.

Exercice 8. (★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient $z_1,\dots,z_n$ des complexes de module 1. On pose

$$z=\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right).$$

Montrer que z est un réel, et que $0\leqslant z\leqslant n^2$.

Exercice 9. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$. Montrer que

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 10. (★★)

1) Résoudre l'équation $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$, de deux façons différentes.
2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 11. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

Exercice 12. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Exercice 13 – Somme géométrique dérivée. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, posons

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

1) En dérivant de deux manière différente la fonction polynomiale $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, déterminer une expression de $S_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) En raisonnant par récurrence, montrer que la formule trouvée à la question 1 est valable pour tout $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.
3) a) Vérifier que, pour tous $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $x \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

$$(1-x)^2 kx^{k-1} = (k-1)x^{k-1} - kx^k + (k+1)x^{k+1} - kx^k + x^{k-1} - x^k + x^k - x^{k+1}.$$

   b) Retrouver avec la formule de la question 2.

Exercice 14 – Somme des première puissances. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, notons $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

1) Calculer $S_0(n)$.
2) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, développer $(k+1)^2 - k^2$. Retrouver la valeur de $S_1(n)$.
3) Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, développer $(k+1)^3 - k^3$. Retrouver la valeur de $S_2(n)$.
4) En généralisant cette méthode, déterminer une formule close pour $S_3(n)$ et $S_4(n)$.
   On pourra remarquer que l'on peut factoriser $S_4(n)$ par $n(n+1)(2n+1)$.

Exercice 15 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des complexes.

1) Déterminer le signe du trinôme du second degré $t \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + t|y_i|\big)^2$ de deux façons différentes.
2) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 16. (★★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Exercice 17. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$,

2) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j^2$,

3) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} n^{p+q}$,

4) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$,

5) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$,

6) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i+j=n}} ij$,

7) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n \\ |i-j|=1}} ij$,

8) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k}{1+\ell}$,

9) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$,

10) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)}$,

11) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}}$,

12) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j < k \leqslant n} j$.

Exercice 18. (★★) Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant la somme double $\displaystyle\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n} x^{k-1}$, retrouver le résultat sur les sommes géométriques dérivées de l'exercice 13.

Exercice 19 – Autour des nombres harmoniques. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ième}}$ nombre harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il n'en existe pas de forme close.

1) Soit $n \geqslant 2$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et de H_n.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ en fonction de n et de H_n.

Exercice 20. (★★★) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit P une application polynomiale sur $\mathbb{C}$ qui est de degré d. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ est tel que $P(a) = 0$. Montrer qu'il existe une application polynomiale Q sur $\mathbb{C}$ de degré $d-1$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z-a)Q(z).$$

On remarquera que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = P(z) - P(a)$ et on utilisera la formule de factorisation de $z^k - a^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. (★★) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des complexes. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in [\![2\,;n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad z_k = \lambda_k z_1.$$

Autrement dit, l'inégalité triangulaire est une égalité si et seulement si les points d'affixes $z_1, \ldots, z_n$ sont sur une même demi-droite d'origine O.

II Produits

Exercice 22. (★★) Soient $x \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0\,;n]\!]$. Calculer les produits suivants :

1) $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (i+2)$,

2) $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (j-1)$,

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k)$,

4) $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} \ell^2(\ell+1)^3$,

5) $\displaystyle\prod_{i=3}^{n} (i^2-1)$,

6) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{2k+7}$,

7) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 2^{1-i^2}$,

8) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$,

9) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$,

10) $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} 2^{p! \times k} \right)$,

11) $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} x^k$,

12) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k\right)$.

Exercice 23. (★★) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=0}^{n} (x^{2^k} + 1) = \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x-1}.$$

Exercice 24. (★★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}.$$

Exercice 25. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n} ij$.

Exercice 26. (★) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Calculer le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

III Formule du binôme de Newton

Exercice 27. (★) A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 28. (★) Quel est le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans $(x+2y+3z)^{12}$?

Exercice 29. (★) Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{1-k}$ 2) $\displaystyle T_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p.$

Exercice 30 – Formule de Pascal généralisée. (★) Soient p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 31 – Inégalité de Bernoulli. (★) Montrer (sans avoir recours à un raisonnement par récurrence) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 32. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(6x)$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 33. (★★)

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3n+3} \geqslant 4.$$

2) Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n}$.

Exercice 34. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2k}$.

Exercice 35. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du complexe $(1+i)^{2n}$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice 36. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k$, 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$, 3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k k \binom{n}{k}$, 4) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i<j \leqslant n} \binom{j-1}{i} 2^i$.

Exercice 37. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^7(x)$ et factoriser $\sin(9x)$.

Exercice 38. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, écrire $\sin(9x)$ sous la forme d'une fonction polynomiale en $\sin(x)$.

Exercice 39. (★★) Soient $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$, 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \binom{2022}{k} \mathrm{j}^k$, 3) (★★★) $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (z+\omega)^n$.

Exercice 40 – Formule de Vandermonde. (★★★) Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r \in [\![0\,;p+q]\!], \qquad \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

La somme peut s'arrêter, au choix, à r ou à p. Pourquoi ?

2) Donner une démonstration par récurrence (sur p par exemple) de cette égalité.

Exercice 41 – Formule d'inversion de Pascal. (★★★)

1) Montrer que, pour tous entiers j, k et n vérifiant $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}.$$

2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j.$$