Feuille d'exercices n° 27

Séries numériques

I Nature de séries explicites

Exercice 1. (★ à ★★) Étudier la convergence des séries de terme général

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,
2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$,
4) $\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$,
5) $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}$,
6) $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}$,
7) $\dfrac{\sqrt{e}}{n^{1/5}\ln(n)}$,
8) $\dfrac{1}{\sqrt{n-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$,
9) $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$,
10) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
11) $\dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$,
12) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
13) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+5}\right)$,
14) $\dfrac{(-1)^n\ln(n)}{n^{5/4}}$,
15) $1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$,
16) $\dfrac{(-1)^n}{n^{n-1}}$,
17) $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
18) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
19) $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
20) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
21) $\left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$,
22) $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2024+n\sqrt{n}}\right)}$,
23) $\dfrac{\operatorname{Arctan}(n^n)}{\ln(n)}\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^{3/7}}\right)\right)$,
24) $\sin(n!)\left(\sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)}-1\right)\sqrt{\ln(n)}$.

Exercice 2. (★★) Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$:

1) $\sum n\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right)$,
2) $\sum\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$,
3) $\sum\exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right)$,
4) $\sum\dfrac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$,
5) $\sum\dfrac{1}{\alpha^{\ln(n)}}$,
6) $\sum\sqrt{1-\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^n}$.

Exercice 3. (★) Donner la nature de la série $\sum\dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\gamma\in\mathbb{R}$.

Exercice 4. (★) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1) Étudier, suivant les valeurs de α, la convergence de la suite (u_n). En cas de convergence, donner sa limite.
2) Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 5. (★★) Soit $\alpha>1$. En comparant à une intégrale, donner la nature de $\sum R_N$ où

$$\forall N\in\mathbb{N},\qquad R_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Exercice 6. (★) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^a}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Exercice 7. (★★) À l'aide d'une transformation d'Abel, prouver que si $\alpha > 0$, alors la série $\sum \frac{\sin(n)}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 8 – Quelques séries alternées. (★★) Donner la nature des séries suivantes :

1) $\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$

2) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

3) $\sum (-1)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$

4) $\sum (-1)^n e^{1/n}$

5) $\sum (-1)^n\sqrt{n}\times\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

6) $\sum \ln(n)\times\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

7) $\sum \sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$

8) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$

9) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

10) $\sum \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$

Exercice 9. (★★★) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ converge et que sa somme est négative.

Exercice 10. (★★★) Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

II Calculs de sommes

Exercice 11. (★) Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes (de 0 à $+\infty$) :

1) $\sum \frac{n^2(-1)^n}{n!}$, 2) $\sum \frac{(-1)^{n!}}{n!}$, 3) $\sum \frac{n^3}{n!}$, 4) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}$,

Exercice 12. (★) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13. (★) Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 14. (★★) Déterminer a et b pour que la série $\sum \ln(n)+a\ln(n+1)\ +b\ln(n+2)$ converge. Calculer alors sa somme.

Exercice 15. (★★) Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Exercice 16. (★★★) On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln(N)+\gamma+\mathsf{o}(1)$$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$. Commenter le signe.

Exercice 17 – Séries géométriques dérivées. (★★) Soit $x \in]-1\,;1[$.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge absolument.
2) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$
3) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. En déduire les sommes
$$\sum_{k=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} n^2x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} (an^2+bn+c)x^n,$$

Exercice 18 – Développement en série entière de $x \longmapsto -\ln(1-x)$. (★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1\,;1[$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$
2) a) Montrer que
$$\forall x \in [0\,;1[\,, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}.$$
   b) Montrer que
$$\forall x \in [-1\,;0[\,, \qquad \left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}.$$
3) En déduire que, pour tout $x \in [-1\,;1[$, $\sum \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme est $-\ln(1-x)$.

Exercice 19 – La série des survivants. (★★★) Dans la suite de terme général $1/n$ dont les termes sont écrits ci-dessous :
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$
on supprime le premier terme, on garde le suivant, on supprime les deux suivants, on garde celui suit, puis on supprime les trois suivants et on garde celui qui suit etc. On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite ainsi obtenue. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

III Résultats généraux sur les séries

Exercice 20. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

Exercice 21. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge absolument. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge. Ce résultat reste-t-il valable si $\sum u_n$ converge sans converger absolument ?

Exercice 22. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $\sum u_n$ convergente. Montrer que la série $\sum u_0u_1u_2\cdots u_n$ converge.

Exercice 23. (★★) Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que
$$\sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geqslant \sum_{k=1}^{N} k.$$
2) En déduire que la série $\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge.

Exercice 24 – Règle de Raab-Duhamel. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Montrer que $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

   b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

   c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.

2) Quelques applications :

   a) Soient x et y deux réels strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+y)u_{n+1} = (n+x)u_n$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum x^{H_n}$ où $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la série harmonique.

   c) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in$ on note $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n)$. Soient $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. On pose

$$u_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \times \frac{1}{n!}$$

   La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauss*. Étudier sa convergence.

Exercice 25 – Ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$. (★★)

1) Soient x et y deux réels. Montrer que $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2) Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs. Donner la nature de $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$.

3) Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

4) On pose

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

   a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit. En donner un élément dont aucun terme n'est nul.

   b) L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$ contient-il des suites constantes non nulles ?

   c) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

   d) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, la suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Et sans le mot « absolument » ?

5) (★★★) Montrer que la série $\sum \dfrac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 26 – Périodicité du développement décimal. (★★)

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a montré en compléments du cours qu'il existe $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.

2) a) Expliciter le développement décimal de $\dfrac{9}{14}$.

   b) Déterminer le rationnel dont le développement décimal est $0,123456745674567\ldots$ (où le motif 4567 se répète indéfiniment à partir du quatrième chiffre après la virgule).

Exercice 27. (★★) Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs tels que

$$u_n^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathsf{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Donner la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de α.

Exercice 28 – Produits infinis. (★★) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$. On appelle produit infini de terme général u_n, et on note $\prod u_n$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel non nul, on dit que le produit $\prod u_n$ est bien convergent et la limite est appelée le produit infini des u_n et noté $\displaystyle\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

1) Étudier la convergence du produit infini $(P_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad u_n = e^{-n^2}, \qquad u_n = e^{-1/n^2}.$$

2) Montrer que, si le produit $\prod u_n$ est bien convergent, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers 1.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels de $]0\,;1]$.
   a) Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel de $[0\,;1]$.
   b) Montrer que les séries $\sum(1-u_n)$ et $\sum \ln(u_n)$ ont la même nature.
   c) En déduire que le produit $\prod u_n$ est bien convergent si et seulement si la série $\sum(1-u_n)$ converge.

Exercice 29. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, et on suppose que $u_n \sim v_n$. Les deux séries sont donc de même nature.

1) (★★) Prouver que si les deux séries convergent, alors les restes sont équivalents.
2) (★★★) Prouver que si les deux séries divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes.

Exercice 30 – Lemme de l'escalier. (★★)

1) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite convergente telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite $\alpha \in \mathbb{R}^*$. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $u_n \sim \alpha n$.

Ce résultat est connu sous le nom de « lemme de l'escalier ». En voici une application générique qui couvre de nombreux exercices de suites récurrentes.

2) Soit $c \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Soit $f : [0\,;c] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0\,;c]$ et admettant en 0 un DL de la forme $f(x) \underset{0}{=} x - ax^p + \mathsf{o}(x^p)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [0\,;c[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Montrer qu'il existe $\delta \in]0\,;c]$ tel que, pour tout $x \in]0\,;\delta]$, $0 < f(x) < x$.
   b) En déduire que, si $u_0 \in]0\,;\delta]$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   c) Déterminer la valeur de $\beta \in \mathbb{R}^*$ pour que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ admette une limite non nulle.
   d) Donner un équivalent de u_n.

3) Appliquer la question précédente à $(f, c) = (\sin, \frac{\pi}{2})$ puis $(f, c) = (x \mapsto \ln(1+x), +\infty)$

Exercice 31 – Critère de condensation de Cauchy. (★★★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui décroît vers 0.

1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
2) En déduire une nouvelle preuve de la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 32 – Théorème de réarrangement de Riemann. (★★★★) Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = x$$

En d'autres termes, lorsqu'on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, on peut réarranger les termes pour que sa somme ait une valeur arbitraire ! D'où l'intérêt de la convergence absolue pour définir la sommabilité (cf. chapitre 39).

2) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

IV Fonctions définies par la somme d'une série convergente

Exercice 33 – Étude de la fonction ζ. (★★)

1) Pour tous $x \in \,]1\,;+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de $\sum \dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$.

Pour tout $x \in \,]1\,;+\infty[$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2) Montrer que ζ est une fonction strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
3) A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1, \qquad \zeta(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

4) On se donne $a \in \,]1\,;+\infty[$ puis x et x_0 deux réels distincts de $]a\,;+\infty[$.
   a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^{x_0}} + \frac{(x-x_0)\ln(n)}{n^{x_0}}\right| \leqslant \frac{(x-x_0)^2\ln(n)^2}{2n^a}.$$

   b) En déduire que

$$\left|\frac{\zeta(x)-\zeta(x_0)}{x-x_0} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^{x_0}}\right| \leqslant |x-x_0| \times I,$$

   avec I une constante à préciser.

   c) Conclure que ζ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et préciser sa dérivée.