Feuille d'exercices n° 16

Relations binaires

I Relations d'ordre

Exercice 1. ($\bigstar$) On se place dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de l'inclusion. L'ensemble $\left\{\left[\dfrac{1}{n}\,;n\right] \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet-il un maximum ? une borne supérieure ? un minimum ? une borne inférieure ?

Exercice 2. ($\bigstar$) On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{N}^2$,

$$x \preccurlyeq y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad y = x^n.$$

Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 3 – Suites strictement monotones dans un ensemble ordonné. ($\bigstar$) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que :

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \prec x_{n+1}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \prec x_n$.

1) Montrer que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (respectivement décroissante), alors, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$, alors $x_p \prec x_n$ (respectivement $x_n \prec x_p$).
2) Montrer que, si E est fini, alors il n'y a pas de suite strictement monotone.

Exercice 4 – Bon et mauvais ordre. ($\bigstar\bigstar$) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que c'est un bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1) Donner un exemple de bon ordre et un exemple de « mauvais ordre » total.
2) Montrer qu'un bon ordre est un ordre total.
3) Montrer que si $\preccurlyeq$ est un bon ordre, alors une suite décroissante d'éléments de E (cf. exercice 3) est stationnaire.
4) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. On suppose qu'il existe une bijection f croissante de $\mathbb{N}$ dans E, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \qquad n \leqslant m \quad \Longrightarrow \quad f(n) \preccurlyeq f(m).$$
Montrer que $\preccurlyeq$ est un bon ordre sur E.
5) Montrer qu'il n'existe pas de bijection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre usuel.

Exercice 5 – Élément maximal, élément minimal. ($\bigstar\bigstar$) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E.

- On dit que $M \in A$ est un élément maximal de A s'il n'existe pas d'élément de A strictement supérieur à M (c'est-à-dire : $\forall x \in A,\ M \preccurlyeq x \implies x = M$).
- On dit que $m \in A$ est un élément minimal de A s'il n'existe pas d'élément de A strictement inférieur à M (c'est-à-dire : $\forall x \in A,\ x \preccurlyeq m \implies x = m$).

1) Déterminer les éléments maximaux de $[\![1\,;10]\!]$ pour la relation de divisibilité.
2) a) Montrer que si A admet un maximum (respectivement un minimum), alors celui-ci est un élément maximal (respectivement minimal).
   b) Montrer que, si l'ordre est total, alors il n'existe pas d'élément maximal (respectivement minimal) qui ne soit pas le maximum (respectivement le minimum).
3) Montrons que, sur $E = \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ muni de la relation de divisibilité, il n'y a pas d'élément maximal et que les éléments minimaux sont exactement les nombres premiers.
4) a) Montrer qu'un ensemble ordonné fini admet un élément minimal (on utilisera l'exercice 3).
   b) Que répondre à quelqu'un qui vous dit : « on trouve toujours plus bête que soi » ? Est-ce à dire qu'il existe un humain plus bête que tous les autres ?

II Relations d'équivalence

Exercice 6. (★) On définit sur $E=(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites ne s'annulant pas, la relation $\sim$ définie par : pour tous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \frac{u_n}{v_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2) Montrer que deux suites équivalentes **convergentes** ont la même limite. Que dire de la réciproque ?

Exercice 7. (★) On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation $\sim$ par : pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$, $x\sim y$ si et seulement si $x+y$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner les classes d'équivalence.

Exercice 8. (★) On définit sur $\mathbb{C}$ une relation $\sim$ par : pour tout $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $z\sim z'$ si et seulement si $|z|=|z'|$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner les classes d'équivalence.

Exercice 9 – Conjugaison. (★) On note $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une relation $\sim$ par : pour tous $f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$f\sim g \qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists\varphi\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}},\quad f=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 10 – Normes équivalentes. (★) Soit E un ensemble non vide. On définit sur $\mathbb{R}^E$ une relation $\sim$ par : pour tous $f\in\mathbb{R}^E$ et $g\in\mathbb{R}^E$,

$$f\sim g \qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad \forall x\in E,\quad \alpha g(x)\leqslant f(x)\leqslant\beta g(x).$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 11. (★★) On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation $\sim$ par : pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$x\sim y \qquad\Longleftrightarrow\qquad y\ln(x)=x\ln(y).$$

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, combien la classe d'équivalence de x pour $\sim$ admet-elle d'éléments ?

Exercice 12 – Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$. (★★★) On définit la relation $\equiv_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{N}^2$ par : pour tous $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ et $(c,d)\in\mathbb{N}^2$, $(a,b)\equiv_{\mathbb{Z}}(c,d)$ si et seulement si $a+d=b+c$.

1) Montrer que $\equiv_{\mathbb{Z}}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$
2) Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^2$, on note $\overline{(a,b)}$ la classe d'équivalence de (a,b). On note $\mathcal{E}=\left\{\overline{(a,b)}\,\middle|\,(a,b)\in\mathbb{N}^2\right\}$. Montrer que la fonction

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ \overline{(a,b)} & \longmapsto & a-b\end{array}\right.$$

est bien définie et bijective. Ceci peut constituer une construction de $\mathbb{Z}$: les éléments de $\mathbb{Z}$ sont vus comme les différences de couples d'entiers.

Exercice 13. (★★) Soit E un ensemble et soit A une partie non vide de E. On définit une relation $\approx$ sur $\mathscr{P}(E)$ par : pour tout $(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2$, $X\approx Y$ si et seulement si $X\cap A=Y\cap A$.

1) Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2) Expliciter une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathscr{P}(E)$ par $\approx$.

Exercice 14. (★★★) On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une relation R par : pour tous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{R}(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad \exists p\geqslant n,\quad \exists q\geqslant n,\quad (u_p\leqslant v_n)\text{ et }(v_q\leqslant u_n).$$

1) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ? une relation d'équivalence ?
2) Notons c une suite constante. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en relation avec c.