Feuille d'exercices n° 2

Raisonnements usuels

Exercice 1. (★) Montrer les propositions suivantes par l'absurde ou par contraposée :

1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(on rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)*.
2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, si x et y sont deux réels tels que $x + y > \varepsilon$, alors $x > \dfrac{\varepsilon}{2}$ ou $y > \dfrac{\varepsilon}{2}$.
4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'implication : $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \ \Rightarrow\ a \leqslant b$.
5) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 2. (★★) On admet que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (nous le montrerons dans le chapitre 12).

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.
2) Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.

Exercice 3. (★★) Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

Exercice 4. (★★) A l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tous réels x et y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 5. (★) Où est l'erreur dans le raisonnement suivant :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $n = n^2$ ».
- $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $n = n^2$ donc, en multipliant par n, il vient $n^2 = n^3$ donc $n = n^3$, si bien que $n - 1 = n^3 - 1 = (n - 1) \times (n^2 + n + 1)$. En divisant par $n - 1$ (non nul car $n \geqslant 2$), on obtient $1 = n^2 + n + 1$ et, enfin, $n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 – Inégalité de Bernoulli. (★) Montrer que pour tous $x \geqslant -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

Exercice 7. (★) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $2^n > n^2$.

Exercice 8. (★) Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 9. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.

Exercice 10. (★★) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

Exercice 11. (★★) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant n réels distincts. En raisonnant par récurrence, montrer que l'ensemble $B = \{x + y \,|\, (x, y) \in A^2\}$ contient au moins $2n - 1$ éléments distincts.

Exercice 12. (★★★) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 distinctes.