Feuille d'exercices n° 3

Propriétés des nombres réels

Exercice 1. (★) Sans calculatrice, simplifier :

1) $\dfrac{12 \times 27 \times 28 \times 7700}{24 \times 18 \times 42 \times 35 \times 55}$, 2) $\dfrac{5}{56} - \dfrac{1}{42} - \dfrac{7}{30} + \dfrac{11}{40}$, 3) $\dfrac{\frac{120\times 239-119}{119\times 239}}{\frac{119\times 239+120}{119\times 239}} - 1$.

Exercice 2. (★) Sans calculatrice, déterminer le signe des expressions suivantes :

1) $\dfrac{7}{4} - \sqrt{3}$, 2) $3\sqrt{5} - 2\sqrt{19} + \sqrt{7}$, 3) $\sqrt{208} + \sqrt{89} - \sqrt{569}$, 4) $\pi - \sqrt{10}$.

Exercice 3. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $2^{n+1} - 2^n$, 2) $3^n + 3^n + 3^n$, 3) $\left(5^{5^n}\right)^{5^n}$, 4) $(-1)^{2-7n} + \dfrac{1}{(-1)^{5-9n}}$, 5) $\frac{1}{\sqrt{n^4+4}+\sqrt{n^4+3}}$.

Exercice 4. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $5^{(3^2)} - (5^3)^2$, 2) $4^{3^{2^{1^{9^{8^{7^{6^{5}}}}}}}}$, 3) $(-1)^{9^{7^{6^{5^{4^{3^{2}}}}}}}$, 4) $\sqrt[5]{25 \times 90 \times 72 \times 150}$.

Exercice 5. (★) Soient x et y des réels positifs tels que $y \leqslant x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}} + \sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}}.$$

Exercice 6. (★★) Pour quelles valeurs des réels x et y, l'expression

$$\sqrt{2 + \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}}$$

est-elle définie ? La simplifier le cas échéant.

Exercice 7. (★) Soit x un réel. Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ si c'est possible :

1) $x^2 = 36 \ \ldots \ x = 6$.
2) $|x| > 4 \ \ldots \ x < -5$
3) $|x| \leqslant 2 \ \ldots \ -2 \leqslant x$
4) $3|x| \geqslant x^2 \ \ldots \ -3 \leqslant x \leqslant 3$.
5) $x^{-4} \leqslant 16 \ \ldots \ x < -1/2$
6) $x^2 \leqslant x \ \ldots \ x \geqslant 0$.

Exercice 8. (★) Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2 + bx + c < 0$?

Exercice 9. (★) Monter que, pour tous réels positifs x et y, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ avec égalité si et seulement si $x = y$.

Exercice 10. (★) Monter que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \leqslant 1 + x$.

Exercice 11. (★★)

1) Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\,\sqrt{x+y}$.
2) Examiner le cas d'égalité de cette inégalité.
3) En déduire que, pour tout $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} + \sqrt{\dfrac{y+z}{2}} + \sqrt{\dfrac{z+x}{2}}$.

Exercice 12. (★★) Montrer que, si n est le produit de quatre entiers naturels consécutifs, alors $n+1$ est le carré d'un entier.
On pourra commencer par développer $(ax^2+bx+c)^2$ lorsque a, b, c et x désignent des réels.

Exercice 13. (★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $|7x-4| = |3-2x|$,
2) $|x-19| = |x+11|$,
3) $|5-x| = 2x$,
4) $|4-x| - |x+2| + |3x+5| = 9$,
5) $13x - 5x^2 = 9$,
6) $(9-x)(x+3) = 30$,
7) $|x^2+x-3| = |x|$,
8) $6x^4 + 11x^2 - 7 = 0$,
9) $\sqrt{x+9} = x-3$,
10) (★★) $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 2$,

Exercice 14. (★★) Résoudre le système d'équation $\left\{\begin{array}{l} 3x+y=12 \\ xy=9 \end{array}\right.$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. (★★) Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $a > 0$ et $b < c$. Résoudre l'équation $\sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} = a$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16. (★) Résoudre l'équation $3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y+z)$ d'inconnues x, y et z dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17. (★) Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $2x^2 + 25x - 42 > 0$,
2) $|2x-5| < |x+3|$,
3) $x^2 - 4|x| \leqslant 5$,
4) $|x+3| - |1-3x| > -2$,
5) $|x^2-6x+7| < 1$.
6) $23x^2 - 12x^4 \geqslant 10$,
7) $\sqrt{x} > 1 + \dfrac{6}{\sqrt{x}}$,
8) $2(x-2)(1-2x) + 1 < x(x+3)$,
9) $\dfrac{1}{3x^2+2x+4} \geqslant \dfrac{2}{5x^2+6x+1}$,
10) (★★) $2x - 5 - \sqrt{4x-7} < 0$.

Exercice 18. (★★) Posons $x_0 = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

1) Vérifier que $x_0^3 + 3x_0 - 14 = 0$.
2) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+ax+b)$.
3) En déduire que $x_0 = 2$.

Exercice 19. (★) Soit n un entier naturel. Exprimer le plus grand entier naturel m vérifiant $2m \leqslant n$ et le plus grand entier naturel p vérifiant $2p+1 \leqslant n$, en fonction de n.

Exercice 20. (★) Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout réel x.

Exercice 21. (★) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0;1\}$.

Exercice 22. (★) Soit $(a,x,T) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [a\,;a+T[$. Exprimer k à l'aide de parties entières.

Exercice 23. (★★) Résoudre l'équation $\lfloor 2x+5 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. (★★) Résoudre l'équation $\lfloor 3x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25. (★★) Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Préciser si les ensembles suivants sont majorés ou minorés et donner, lorsque c'est possible, leur minimum et leur maximum :

1) $]-5\,;2]$,
2) $\mathbb{R}_+^*$,
3) $[-7\,;-3] \cup]6\,;7[$,
4) $\left\{(-1)^n a + b \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,
5) $\left\{an + b \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,
6) $\left\{\dfrac{a}{n} + b \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
7) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
8) $\left\{\dfrac{1}{3n} - \dfrac{2}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
9) $\left\{an^2 - bn + c \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,
10) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \,\middle|\, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$,
11) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \,\middle|\, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

On poursuivra cet exercice dans le TD n° 14.

Exercice 26. (★★) Déterminer un majorant et un minorant (grossiers) de l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{4x^2 - 2x^4 + 3}{x^4 + x^2 - x + 1} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}.$$

On poursuivra cet exercice dans le TD n° 4.