Feuille d'exercices n° 18

Limites et continuité

I Limites

Exercice 1. (★) Étudier les (éventuelles) limites suivantes. On distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite.

1) $x \mapsto \dfrac{2}{4x-3x^2-1}$ en 1.
2) $x \mapsto \sqrt{7-x}-\sqrt{3-x}$ en 0 et en $-\infty$.
3) $x \mapsto \dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+2\ln(x)}$ en $+\infty$.
4) $x \mapsto 2x^4+x-5+\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1}$ en 1.
5) $x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
6) $x \mapsto x^x$ en 0^+.
7) $x \mapsto \dfrac{3-5x}{x^2\ln(x)}$ en 0^+ et en $+\infty$.
8) $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
9) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}-2\cos(x)}{1-2\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$.
10) $x \mapsto \dfrac{7\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(6x)}$ en 0.
11) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ en 0.
12) $x \mapsto \ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1^+.
13) $x \mapsto \ln(\sin(x))-\ln(x)$ en 0^+.
14) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
15) $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$.
16) $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$
17) $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en $+\infty$.
18) $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$.
19) $x \mapsto x^\alpha\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0^+, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2. (★) Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \longmapsto x-\sqrt{\lfloor x^2\rfloor}$.

Exercice 3. (★) Notons exceptionnellement $\sin^1 = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{n+1} = \sin\circ\sin^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n(x)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. (★) Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(x-1)-\ln(\sqrt{x}-1) & \text{si} \quad x>1 \\ \ln(2) & \text{si} \quad x\leqslant 1 \end{cases}, \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+\mathrm{e}^{-1/x}} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases},$$

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)\ln(-x) & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x^{-3/2}(1-\cos(2x)) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}.$$

Exercice 5. (★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bijective croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 6. (★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Exercice 7. (★★)

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x)+\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si et seulement si $f(\sin(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{\lfloor 1/x\rfloor}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$?

Exercice 8. (★★★) Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$.

1) Montrer que f est définie sur $I = [1\,; +\infty[$ et continue sur un ensemble que l'on précisera.
2) Montrer que f est continue à droite en tout point de I.
3) Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Montrer que f admet une limite à gauche en p. Est-elle continue à gauche en p ?
4) a) Calculer la limite de la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   - $u_n = n$,
   - $u_n = n + \dfrac{1}{2}$,
   - $u_n = n + \dfrac{3}{\ln(n)}$.

   b) La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

   c) Soit $a \in [0\,; 1]$. Donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exercice 9. (★★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{N}$). *On utilisera le fait que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection (cf. chapitre 15).*

II Continuité

Exercice 10. (★) Prolonger par continuité les fonctions (lorsque c'est possible) aux bornes finies de leurs ensembles de définition :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 4x - 5}{2\sqrt{x+5}}, \quad g : x \mapsto x^{1/\ln(x)}, \quad h : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2|x|}\right), \quad j : x \mapsto x - \frac{x}{|x|} \quad k : x \mapsto x - \ln(x-1).$$

Exercice 11. (★) Montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de

$$\int_0^9 (\lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})\, dx.$$

Exercice 12. (★★) Étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 13. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur une partie D comme dans le cours. Montrer que $x \longmapsto \min\{f(x); g(x)\}$ et $x \longmapsto \max\{f(x); g(x)\}$ sont continues sur D.

Exercice 14. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f \leqslant g$ sur tout $\mathbb{R}$. A-t-on $f < g$?

Exercice 15. (★) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si B est dense dans A alors $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité ?

Exercice 16. (★★) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Construire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \leqslant g$.

Exercice 17. (★★) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x-1)$. Soit y un réel quelconque. On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \dfrac{1 + y_n}{2}$.

1) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.
3) Caractériser la fonction f.

Exercice 18. (★★) Notons $\mathcal{A} = \big\{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\big|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\big\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 – Autour de la fonction de Dirichlet. (★★) La fonction de Dirichlet est la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0, il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) \right)$.
3) Étudier la continuité de la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

Exercice 20. (★★★) La fonction de Thomae est la fonction

$$T : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \text{ et } \dfrac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de } x. \end{cases}$$

1) Montrer que T est discontinue en tout rationnel.
2) a) Montrer que T est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.
   b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon = \{y \in [0\,;1] \mid T(y) > \varepsilon\}$ est un ensemble fini.
   c) En déduire que T est discontinue continue en tout irrationnel.

Exercice 21. (★★) Construire une bijection de $[0\,;1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Exercice 22. (★★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable (c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{N}$). *On utilisera le fait que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection (cf. chapitre 15).*

III Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 23. (★) Que dire d'une fonction f continue vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(f(x)\big)^2 = f(x)$.

Exercice 24. (★) Un marathonien a parcouru une distance de 24km en deux heures. Montrer qu'il a parcouru exactement 12km durant un intervalle de temps d'une heure.

Exercice 25. (★) Soient f et g continues sur $[0\,;1]$ telles que $\sup\limits_{[0\,;1]} f = \sup\limits_{[0\,;1]} g$. Montrer que les graphes de f et g se croisent.

Exercice 26. (★) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $\ell < 1$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 27. (★) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que toute application continue $f : [a\,;b] \longrightarrow [a\,;b]$ admet un point fixe.

Exercice 28. (★) Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $[0\,;1]$ soit inclus dans $f([0\,;1])$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 29. (★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe. Est-ce que ce résultat est vrai si f est une fonction croissante ?

Exercice 30. (★★) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Exercice 31. (★★) Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 32. (★★) Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Soient $m = \min_{[a\,;b]} f$ et $M = \max_{[a\,;b]} f$ (pourquoi existent-ils ?). On suppose que $m < M$. Soit $y \in \,]m\,;M[$. Montrer que y a au moins deux antécédents dans $[a\,;b]$.

Exercice 33. (★★★) Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ continue vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide). Donner l'allure de son graphe.

Exercice 34. (★★) A l'aide de l'algorithme de dichotomie et de Python, déterminer une valeur approchée de π à 10^{-6} près en tant que solution sur $[0\,;4]$ de l'équation $\cos(x/2) = 0$.

Exercice 35. (★★) A l'aide de l'algorithme de dichotomie et de Python, écrire une fonction qui prend en entrée un réel x et qui calcule une approximation de $\mathrm{Arctan}(x)$ à 10^{-6} près.

Exercice 36. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n strictement positif tel que $1 + \sqrt{x_n}\ln(x_n) = n$. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et étudier sa limite.

Exercice 37. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 3$, d'inconnue $x \in \,]1\,;+\infty[$, admet une unique solution que l'on note x_n. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

Exercice 38 – Une fonction implicite. (★★) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < p < n$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $t^n + xt^p = 1$. On note t_x cet unique réel en question.
2) Étudier les variations et les limites en $\pm\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto t_x$.

IV Théorème des bornes atteintes

Exercice 39. (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Supposons que f admette des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0\,;1]$ telles que :

$$\forall x \in [0\,;1]\,, 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $C\,f(x) \leqslant g(x)$. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions définies sur un segment.

Exercice 41. (★) Montrer qu'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 42. (★★) Soit f une fonction continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[a\,;b]$. Montrer que

$$\sup_{x\in[a\,;b]} f(x) = \sup_{x\in]a\,;b[} f(x)$$

Exercice 43. (★★) Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 44. (★★) Existe-t-il

- Une bijection continue de $[0\,;1]$ sur $]0\,;1[$?
- Une surjection continue de $[0\,;1]$ sur $]0\,;1[$?
- Une surjection continue de $]0\,;1[$ sur $[0\,;1]$?
- Une bijection continue de $[0\,;1]$ sur $\mathbb{R}$?
- Une surjection continue de $[0\,;1]$ sur $\mathbb{R}$?
- Une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $[0\,;1]$?
- Une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;1[$?
- Une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;1[$?
- Une surjection continue de $]0\,;1[$ sur $\mathbb{R}$?
- Une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$?
- Une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$?
- Une surjection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$?