

# Intégration sur un segment

Sauf indication contraire,  $I$  désigne est un intervalle non vide et non réduit à un point,  $a$  et  $b$  désignent deux réels tels que  $a < b$ .

## I Fonctions uniformément continues

**Exercice 1. (★)** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  est uniformément continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $g \circ f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2. (★)** Montrer que  $x \mapsto x \ln(x)$  est uniformément continue sur  $]0; 1]$ .

**Exercice 3. (★★)** Montrer que  $x \mapsto \sin(x^2)$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4. (★★)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions uniformément continues sur un intervalle  $I$ .

- 1) Étudier l'uniforme continuité sur  $I$  de  $f + g$ , de  $f \times g$  et de  $1/f$  lorsque  $f$  ne s'annule pas.
- 2) On suppose que  $f(I) \subset I$ . La fonction  $g \circ f$  est-elle uniformément continue sur  $I$ ?
- 3) On suppose que  $f$  est strictement monotone sur  $I$ . La fonction  $f^{-1}$  est-elle uniformément continue sur  $J = f(I)$ ?

**Exercice 5 – Les fonctions UC sont sous-affines. (★★★)** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continue. Montrer qu'il existe  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $|f(x)| \leq ax + b$ .

**Exercice 6. (★★★)**

- 1) Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne telle que  $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Montrer que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- 2) Même question en remplaçant « lipschitzienne » par « uniformément continue ».
- 3) Donner un contre-exemple si on suppose simplement la continuité.

**Exercice 7. (★★★)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant une limite finie en  $+\infty$  et une limite finie en  $-\infty$ . Montrer que  $f$  est bornée et uniformément continue. Une fonction bornée et continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est-elle forcément uniformément continue?

## II Utilisation des propriétés de l'intégrale

**Exercice 8. (★)** Prouver que

$$\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan(x)}{x} dx \leq \sqrt{3} \ln(2).$$

**Exercice 9. (★)** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ . Soient  $\alpha = \min f$  et  $\beta = \max f$ . Justifier l'existence de  $\alpha$  et  $\beta$  et prouver que  $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq -\alpha\beta$ .

**Exercice 10. (★★)** Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^1 f^2(t) dt \mid f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 1 \right\}$$

admet une borne inférieure, que celle-ci est nulle et qu'elle n'est pas atteinte.

**Exercice 11 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★)** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a; b]$  et à valeurs réelles. Calculer le discriminant du trinôme  $\int_a^b (f(t) + Xg(t))^2 dt$  et en déduire que

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}.$$

Discuter le cas d'égalité.

**Exercice 12 – Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a; b]$ .

1) (★★) Supposons que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

si et seulement si  $f$  est de signe constant.

2) (★★★★) Supposons que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

si et seulement si il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $t \in [a; b]$ ,  $f(t) = |f(t)|e^{i\theta}$  (autrement dit  $f$  a un argument constant sur l'ensemble des points où elle ne s'annule pas).

**Exercice 13 – Formule de la moyenne. (★★)**

1) Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, soit  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue. Montrer qu'il existe  $c \in [a; b]$  tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \times \int_a^b g(t) dt$$

2) Soit  $\eta > 0$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; \eta]$  et à valeurs réelles.

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t) dt$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$ .

3) (★★★★) Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et croissante et soit  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer qu'il existe  $c \in [a; b]$  tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt + f(b) \int_c^b g(t) dt$$

**Exercice 14. (★★★★)** Les deux questions sont indépendantes, mais les méthodes sont analogues.

1) Soit  $f$  continue sur  $[0; \pi]$  vérifiant  $\int_0^\pi f(x) \sin(x) dx = \int_0^\pi f(x) \cos(x) dx = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois.

2) Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On suppose que pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  s'annule au moins  $n + 1$  fois.

### III Suites et fonctions définies à l'aide d'intégrales

**Exercice 15. (★)** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

**Exercice 16. (★★)** Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^e (\ln(t))^n dt$ .

**Exercice 17. (★)** Donner le domaine de définition des fonctions

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{t}{\ln(t)} dt$$

ainsi que leur signe sur leur domaine de définition.

**Exercice 18. (★)** Montrer que  $\int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{-nt} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 19. (★)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(xt) dt.$$

**Exercice 20. (★)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\int_0^x f(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  est la fonction nulle. Est-ce encore vrai si  $f$  est seulement supposée continue par morceaux ?

**Exercice 21. (★)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 22. (★★)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que, si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\int_x^{x+1} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 23. (★★)** Soit  $f$  continue sur  $[a; b]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que

$$\|f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Exercice 24. (★★)** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a; b]$ . Déterminer les domaines de définition et de continuité de la fonction  $\varphi : x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$ .

**Exercice 25. (★★)** Considérons  $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}} du$ .

- 1) Calculer  $F(0)$ . A l'aide d'un encadrement, montrer que  $F$  est continue en 0.
- 2) Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . A l'aide d'un changement de variables, exprimer  $F(x)$  en fonction d'une intégrale dont seules les bornes dépendent éventuellement de  $x$ .
- 3) Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Calculer sa dérivée.
- 4) Montrer que  $F$  est dérivable en 0.

*On pourra utiliser le fait (montré dans le TD4) que, pour tout  $y \in \mathbb{R}^*$ ,  $1 - \frac{y^2}{3} \leq \frac{\sin(y)}{y} \leq 1$ .*

**Exercice 26. (★★)** Montrer que  $\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  sans faire de calculs.

**Exercice 27. (★★)**

- 1) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique réel  $\varphi(x)$  tel que  $\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2} dt = 1$ .
- 2) Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exercice 28. (★)** Soit  $\alpha > 0$ . Sans utiliser de sommes de Riemann, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha + 1}.$$

**Exercice 29. (★★)** On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad u_n = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k \ln k} \right) - \ln(\ln(n)).$$

1) Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$  :

$$\frac{1}{(p+1) \ln(p+1)} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{p \ln p}$$

2) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

**Exercice 30. (★★)** Soit  $f$  une fonction continue et strictement croissante sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et telle que  $f(a) = 0$ . Montrer que

$$\forall t \in [a; b], \quad \int_a^t f(u) du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u) du = tf(t).$$

**Exercice 31 – Lemme de Gronwall. (★★)** Soit  $a \in I$ . Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}_+$  continues sur  $I$ . Soit  $A \in \mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $x \in I$ ,

$$f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t) dt.$$

1) On définit les fonctions  $y$  et  $z$  sur  $I$  par

$$y : x \mapsto A + \int_a^x f(t)g(t) dt \quad \text{et} \quad z : x \mapsto y(x) \exp\left(-\int_a^x g(t) dt\right).$$

Déterminer les variations de  $z$  sur  $I$ .

2) Démontrer le lemme de Gronwall :

$$\forall x \in I, \quad x \geq a \implies f(x) \leq A \exp\left(\int_a^x g(t) dt\right).$$

3) Soit  $\varphi$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  avec  $\varphi(0) = 0$ . On suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi'(x) \leq \alpha\varphi(x)$ . Montrer que  $\varphi$  est la fonction nulle.

## IV Sommes de Riemann

**Exercice 32.** Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$1) (\star) u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right),$$

$$4) (\star\star) u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)},$$

$$2) (\star) u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2},$$

$$5) (\star\star\star) u_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{1/n}$$

$$3) (\star) u_n = \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n^{x+1}} \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+,$$

$$6) (\star\star\star) u_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right).$$

**Exercice 33. (★)** Calculer  $\int_0^1 e^t dt$  à l'aide d'une somme de Riemann.

**Exercice 34. (★)** Soit  $\varepsilon > 0$ . Déterminer  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$  est une approximation de  $\frac{\pi}{4}$  à  $\varepsilon$  près.

**Exercice 35. (★★)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère  $A_1 A_2 \dots A_n$  un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 et on forme la quantité  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n A_1 A_k$ . Calculer la limite de  $(S_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 36 – Inégalité de Jensen. (★★)** Soit  $\varphi$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[0; 1]$ . En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

**Exercice 37 – Intégrale de Poisson. (★★★)** Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ . Posons  $I(x) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2 + 2x \cos(u) + 1) du$ .

- 1) Montrer que l'intégrale  $I(x)$  existe et que  $I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|x + e^{iu}| du$ .
- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $I_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$ . Montrer que  $I_n(x) = \ln|1 - x^n|$ .
- 3) En déduire une expression de  $I(x)$ .

## V Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux

**Exercice 38. (★)**

- 1) Soient  $0 < a < b$  deux entiers naturels. Calculer  $\int_a^b [x] dx$ .
- 2) Calculer  $\int_0^{\pi} \sin\left([x] \times \frac{\pi}{4}\right) dx$ .
- 3) (★★) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ .

**Exercice 39 – Lemme de Riemann Lebesgue.** On a vu en cours que, lorsque  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b]$  et à valeurs complexes, on a

$$\int_a^b f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

- 1) Montrer que, cette limite reste vraie si  $f$  est, cette fois, une fonction en escalier sur  $[a; b]$ .
- 2) En déduire que cette limite est encore valable lorsque  $f$  est une fonction continue par morceaux sur  $[a; b]$ .

**Exercice 40. (★★)** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que, pour toute fonction  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  en escalier,  $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$ . Montrer que  $f$  est la fonction nulle.

**Exercice 41 – Fonctions Riemann intégrables. (★★)** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Notons

$$\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \mid \varphi \leq f\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R}) \mid f \leq \psi\}$$

puis

$$I^-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} \quad \text{et} \quad I^+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}$$

On dit que  $f$  est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) sur  $[a; b]$  si  $I^-(f)$  et  $I^+(f)$  ont respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, et si celles-ci sont égales.

- 1) Montrer que, si  $f$  est continue par morceaux, alors  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a; b]$  et que

$$\int_a^b f(t) dt = \sup I^-(f) = \inf I^+(f).$$

- 2) Montrer que  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est pas Riemann-intégrable.

**Exercice 42. (★★)** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  en escalier. Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon.$$