Feuille d'exercices n° 17

Groupes et anneaux

I Lois de composition interne

Exercice 1. (★) Soit E muni d'une loi de composition associative et commutative notée multiplicativement. Soit $(x, y) \in E^2$. On suppose que xy est symétrisable. Montrer que x et y le sont aussi.

Exercice 2. (★) Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$. Un élément x de E est dit idempotent si $x * x = x$.

1) Montrer que si tout élément de E est régulier et si $*$ est distributive par rapport à elle-même, alors tout élément de E est idempotent.
2) Montrer que si tout élément de E est régulier et si $*$ est associative, alors E admet au plus un élément idempotent.

Exercice 3. (★) On munit l'ensemble $\mathbb{Q}^2$ d'une loi définie par :

$$\forall((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{Q}^2, \qquad (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1x_2 + y_2).$$

1) La loi $\otimes$ est-elle commutative ?
2) Montrer que $\otimes$ est associative et admet un élément neutre.
3) Étudier l'existence de symétriques.

Exercice 4. (★)

1) On munit $\mathbb{N}$ des deux lois internes $*$ et $\circ$ définies par :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{N}^2, \qquad a * b = a + 2b \qquad \text{et} \qquad a \circ b = 2ab$$

Sont-elles commutatives, associatives, distributives l'une par rapport à l'autre ?

2) Même question avec, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a * b = a + b$ et $a \circ b = ab^2$.
3) Même question avec, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $a * b = a^2 + b^2$ et $a \circ b = a^2b^2$.

Exercice 5. (★) On définit une loi interne $*$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \star y = x + y + xy^2.$$

1) La loi $\star$ est-elle commutative ? associative ?
2) Montrer que $\star$ admet un élément neutre.
3) Montrer qu'aucun élément de $\mathbb{R}^*$ n'admet d'inverse pour $\star$.
4) Résoudre l'équation $x \star x = 3$.

Exercice 6. (★★) On définit une loi interne $*$ sur $\mathbb{Q}$ par :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{Q}^2, \qquad a * b = a + b + ab.$$

1) La loi $*$ est-elle associative, commutative ? Est-ce que $\mathbb{Q}$ admet élément neutre de $*$?
2) La loi $*$ est-elle distributive par rapport à l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$?
3) Quels sont les éléments inversibles, réguliers, idempotents (i.e. les éléments x tels que $x * x = x$) ?
4) Résoudre les équations $7 * x = 3$, $x * (-5) = -1$, $x * x = 2$, $x * x = 3$.
5) (★★★) Calculer, pour a inversible et $n \in \mathbb{Z}$, a^n (il s'agit des puissances au sens de la loi $*$).

Exercice 7. (★★) Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$.

1) On suppose dans cette question que E n'est pas un singleton. Montrer que si f est injective mais non surjective, alors f admet plusieurs symétriques à gauche (pour la composition). Admet-elle un symétrique à droite ?
2) Montrer que si f est surjective mais non injective, alors f admet plusieurs symétriques à droite. Admet-elle un symétrique à gauche ?

Exercice 8. (★★) Soit E un ensemble non vide. Soit $*$ une loi de composition interne commutative et associative sur E. On suppose de plus que tout élément de E est idempotent, c'est-à-dire, pour tout $x \in E$, $x * x = x$. On définit sur E la relation $\preccurlyeq$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \preccurlyeq y \quad \Longleftrightarrow \quad x * y = x.$$

1) Reconnaître $\preccurlyeq$ lorsque $*$ est l'intersection sur $\mathscr{P}(F)$ (avec F un ensemble non vide).
2) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
3) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $x * y = \inf\{x;y\}$. (au sens de la relation d'ordre $\preccurlyeq$).

II Groupes

Exercice 9. (★) Soit n un entier naturel impair. On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$$

où, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{z}$ désigne exceptionnellement l'unique réel x tel que $x^n = z$.

1) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.
2) Montrer que $\varphi : x \longmapsto x^n$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, *)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 10. (★★) Les ensembles suivants sont-ils des groupes ?

1) $\{x \mapsto ax + b \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ muni de la composition.
2) $]-1\,;1[$ muni de la loi $\oplus$ définie par : pour tout $(x,y) \in \,]-1\,;1[^2$, $x \oplus y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
3) $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\star$ définie par : pour tous (x,y) et (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, $(x,y) \star (a,b) = (x+a, ye^a + be^x)$.

Exercice 11. (★★) Montrer que $G = \left\{x + y\sqrt{3} \,|\, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x^2 - 3y^2 = 1\right\}$ sest un sous-groupe de $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 12. (★★) Soit G un groupe. Soient $(a,b) \in G^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(ab)^n = e$. Montrer que $(ba)^n = e$.

Exercice 13. (★) Soit G un groupe (pas nécessairement abélien) de neutre e et soient a et b deux éléments de G.

1) Montrer que, si $ab = b^2 a$ et $b^5 = e$, alors $ab^3 = ba$ et $a^2 b^2 = b^3 a^2$.
2) Montrer que, si $a^5 = e$ et $ab = ba^3$, alors $a^2 b = ba$ et $ab^3 = b^3 a^2$.

Exercice 14. (★★) Soit G un groupe tel que pour tout $(x,y) \in G^2, (xy)^2 = x^2 y^2$. Montrer que G est abélien.

Exercice 15. (★★) Soit G un groupe dont tous les éléments x vérifient $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 16. (★★) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Est-il égal à $\mathbb{U}$?

Exercice 17. (★★) Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G tels que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Montrer que $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 18. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $z \longmapsto z^n$ réalise un endomorphisme de groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Donner son image et son noyau.

Exercice 19. (★★) Soient G_1, G_2, H_1, H_2 quatre groupes. On suppose que G_1 et G_2 sont isomorphes, ainsi que H_1 et H_2. Montrer que les groupes $G_1 \times H_1$ et $G_2 \times H_2$ sont isomorphes.

Exercice 20. (★★) Soient $(G, \times)$ un groupe, E un ensemble (pas forcément un groupe) et $f : G \to E$ une bijection. On définit une loi de composition interne $*$ sur E par :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x * y = f\left(f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)\right)$$

Montrer que $(E, \times)$ est un groupe isomorphe à $(G, \times)$.

Exercice 21. (★★) Soit $(E, \top)$ un groupe. Soit F un ensemble non vide muni d'une loi interne $\perp$. On suppose qu'il existe une bijection $f : E \to F$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$$

Montrer que $(F, \perp)$ est un groupe isomorphe à $(E, \top)$.

Exercice 22. (★★) Soient $(G, .)$ un groupe et $a \in G$. On définit une nouvelle loi $*$ sur G par $x * y = xay$. Montrer que $(G, *)$ est un groupe isomorphe à $(G, .)$.

Exercice 23. (★★)

1) Donner tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}$ dans lui-même. En déduire le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}$ (i.e. des morphismes bijectifs de $\mathbb{Z}$ dans lui-même).
2) Donner tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Q}$ dans lui-même.
3) Donner tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 24. (★★) Les groupes suivants sont-ils isomorphes ?

1) $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
2) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.
3) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.
4) $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
5) $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 25. (★★★) Montrer que si E et F sont deux ensembles équipotents (i.e. s'il existe une bijection de E dans F) alors S_E et S_F sont isomorphes.

Exercice 26 – Centre d'un groupe. (★★) Soit G un groupe. On définit le centre de G comme étant l'ensemble $Z(G) = \{x \in G \,|\, \forall y \in G, xy = yx\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.

1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G.
2) A quelle condition $Z(G)$ est-il égal à G ?
3) Montrer que, si $f : G \longrightarrow G$ est un automorphisme, alors $f(Z(G)) = Z(G)$.
4) (★★★) Montrer que, si un ensemble E contient au moins 3 éléments, alors $Z(S_E) = \{\mathrm{Id}_E\}$, c'est-à-dire que Id_E est le seul élément qui commute avec tous les éléments de S_E.

Exercice 27 – Sous-groupes distingués. (★★) Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. Si $x \in G$, on note $xH = \{xh \,|\, h \in H\}$, et on définit de façon analogue Hx et xHx^{-1}.

1) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   - $\forall x \in G,\ xH = Hx.$
   - $\forall x \in G,\ xHx^{-1} = H.$
   - $\forall x \in G,\ \forall h \in H,\ xhx^{-1} \in H.$

   On dit qu'un sous-groupe de G vérifiant ces conditions est un sous-groupe distingué de G.
2) Montrer que si G est commutatif, tout sous-groupe de G est distingué dans G.
3) Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est distingué dans G_1.
4) Montrer que $Z(G)$, le centre de G, est distingué dans G.

Exercice 28 – Sous-groupes de $\mathbb{R}$. (★★★)

1) a) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (pour la loi $+$).
   b) Une partie dense de $\mathbb{R}$ est-elle un sous-groupe de $\mathbb{R}$?

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (pour la loi $+$) qui n'est pas $\{0\}$.

2) Montrer que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure α et que $\alpha \geqslant 0$.
3) Supposons que $\alpha > 0$.
   a) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \notin H$. Justifier qu'il existe deux éléments h et h' distincts dans H et inclus dans $]\alpha\,;2\alpha[$.
   b) Aboutir à une contradiction et obtenir sur $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.
   c) Montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
4) Supposons que $\alpha = 0$. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

On vient de montrer qu'un sous groupe de $\mathbb{R}$ (pour la loi $+$) est ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou bien dense dans $\mathbb{R}$. Voyons quelques applications de ce résultat.

5) a) Montrer que, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ si et seulement si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $\{\cos(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1\,;1]$.

III Anneaux et corps

Exercice 29. (★) Soit A un anneau tel que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. Montrer que A est commutatif.
On commencera par montrer que, pour tout $x \in A$, $2x = 0$.

Exercice 30. (★) Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ est un anneau (muni de l'addition et du produit des fonctions). Est-il intègre ?

Exercice 31. (★) On considère l'anneau $A = \mathbb{R}^{[0\,;2]}$ muni de l'addition et du produit des fonctions (il n'est pas demandé de prouver que c'est effectivement un anneau). On note A_1 l'ensemble des éléments de A nuls sur $]1\,;2]$. Montrer que $(A_1, +, \times)$ est un anneau inclus dans A. Est-ce un sous-anneau de A ?

Exercice 32. (★) Soit E un ensemble non vide. Donner les diviseurs de zéro et les inversibles de $\mathbb{Z}^E$ (l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 33. (★) On note $\mathbb{Q}_i$ l'ensemble des rationnels dont le dénominateur (dans l'écriture irréductible) est impair. Montrer que $\mathbb{Q}_i$ est un anneau et donner ses éléments inversibles.

Exercice 34. (★) Soit $k \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ des deux lois de composition internes suivantes :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} a\$b = a + b - k \\ a\top b = ab - k(a+b) + k(k+1) \end{cases}$$

Étudier la structure de $(\mathbb{R}, \$, \top)$.

Exercice 35. (★) Montrer que $\mathbb{D}$, l'ensemble des nombres décimaux, est un anneau. Est-ce un corps ?

Exercice 36. (★★) Soit E un ensemble non vide quelconque. On appelle différence symétrique de deux parties A et B de E, et on note $A\Delta B$, la partie $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ (cf. exercice 10 du TD n° 15).

1) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
2) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.
3) Est-ce que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cup)$ est un anneau ?
4) Soit F une partie de E. Est-ce que $\mathscr{P}(F)$ est un sous-anneau de $\mathscr{P}(E)$?
5) Ces résultats sont-ils encore vrais avec $\mathscr{P}_f(E)$, l'ensemble des parties finies de E, à la place de $\mathscr{P}(E)$?

Exercice 37. ($\bigstar$) Montrer que le seul morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ est l'identité.

Exercice 38. ($\bigstar\bigstar$)

1) Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \,|\, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$ est un anneau intègre.
2) On définit sur $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ une application N par $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que N est une application multiplicative i.e. vérifie $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous x et y dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
3) En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sont exactement les éléments de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Exercice 39. ($\bigstar\bigstar$)

1) Soit d un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \,|\, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.
2) Déterminer tous les automorphismes de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
3) Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 40 – Éléments nilpotents. ($\bigstar\bigstar$) Soit A un anneau. On dit que a est un élément nilpotent de A si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k = 0_A$.

1) Soit a nilpotent dans A. Justifier que $n = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,|a^k = 0_A\}$ existe. L'entier n est appelé l'indice de nilpotence de a.
2) Montrer que, si a est nilpotent d'indice n, alors $a^k = 0_A$ pour tout $k \geqslant n$.
3) Montrer que, si a et b sont deux éléments nilpotents qui commutent, alors ab et $a + b$ est nilpotent.
4) Montrer que, si a est nilpotent, alors $1_A + a$ est inversible (et préciser son inverse).
5) Soient a et b deux éléments de A tels que ab soit nilpotent. Montrer que ba est nilpotent.

Exercice 41. ($\bigstar$) Soit A un anneau. Montrer que le centre $Z(A) = \{a \in A \,|\, \forall b \in A, ab = ba\}$ de A est un sous-anneau de A (on a déjà étudié le centre d'un groupe dans l'exercice 26).

Exercice 42. ($\bigstar\bigstar$) Un anneau commutatif intègre **fini** est un corps.
On utilisera le fait qu'une injection entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection.

Exercice 43 – L'anneau $\mathbb{Z}^2$. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) On munit $\mathbb{Z}^2$ de sa structure d'anneau produit.

1) Quels sont les diviseurs de 0, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}^2$?
2) Trouver tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$. On pourra s'intéresser aux images de $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ par un tel morphisme.
3) Montrer que les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$ sont les $\{(n + ak, n) \,|\, (n, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 44 – Caractéristique d'un corps. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Le but de cet exercice est de prouver que les groupes $(\mathbb{K}, +)$ et $(\mathbb{K}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

1) Démontrer ce résultat lorsque $\mathbb{K}$ est fini. On suppose dans la suite que $\mathbb{K}$ est infini.
2) On définit la fonction φ qui à tout entier n associe $n\,1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \varphi(n) = \begin{cases} \underbrace{1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}}_{n \text{ fois}} & \text{si} \quad n \in \mathbb{N}^* \\ \underbrace{-1_{\mathbb{K}} - \cdots - 1_{\mathbb{K}}}_{-n \text{ fois}} & \text{si} \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N} \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

   a) Montrer que φ est un morphisme d'anneaux.
   b) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = p\mathbb{Z}$: p est appelé la caractéristique de $\mathbb{K}$.
   c) Montrer que p est nulle ou est un nombre premier.
3) Prouver que $(\mathbb{K}, +)$ et $(\mathbb{K}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes. On s'intéressera à l'équation $x^2 = 1_{\mathbb{K}}$.