Feuille d'exercices n° 22

Fractions rationnelles

Exercice 1. (★) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

1) $\dfrac{X^4+1}{X^4-1}$, 2) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$, 3) $\dfrac{X^2+1}{X^2(X-1)^2}$, 4) $\dfrac{X^{16}+1}{X^4+1}$.

Exercice 2. (★) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 3. (★) Soient F et G deux fractions rationnelles dont les fonctions rationnelles associées coïncident en une infinité de points. Montrer que $F = G$.

Exercice 4. (★) Soit $n \geqslant 1$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles $\dfrac{X}{X^n-1}$ et $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

Exercice 5. (★) Montrer que $A = \{R \in \mathbb{C}(X) \mid \deg(R) \leqslant 0\}$ est un anneau.
L'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{P} \,\middle|\, P \in \mathbb{K}[X]^* \right\} \cup \{0\}$ est-il un sous-anneau de A ?

Exercice 6. (★★) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{(X^3-1)^2}$.
On pourra comparer $F(X)$ et $F(jX)$.

Exercice 7. (★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. En utilisant une décomposition en éléments simples, donner une CNS pour que P' divise P.

Exercice 8. (★★) On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}[X]$. On suppose que P est scindé à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $Q_\alpha = P + \alpha P'$.

1) Déterminer les variations de la fonction rationnelle associée à $\dfrac{Q_\alpha}{P}$.
2) En déduire que Q_α est scindé à racines simples.

Exercice 9. (★★) On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}(X)$. Soit $n \geqslant 1$. Posons $G = \dfrac{X^n}{(X+1)^n}$.

1) Donner la décomposition en éléments simples de $G(X-1)$. En déduire celle de G.
2) Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$.

Exercice 10 – Théorème de Gauss-Lucas. (★★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P'. Montrer que α peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs (donc réels) de somme 1 des racines de P. Interpréter géométrique ce résultat.
On pourra utiliser la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ et le fait que 0 est son propre conjugué.

Exercice 11. (★★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On suppose que P admet n racines simples notées $z_1, \ldots, z_n$.

1) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k)}$. On séparera les cas $n = 1$ et $n \geqslant 2$.
2) Montrer que, si $z_k \neq 0$ pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)} = \frac{-1}{P(0)}$.

Exercice 12. (★★) Soit $n \geqslant 1$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Posons $R = X(X-1)\ldots(X-n)$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{R'(k)}$ et en déduire que parmi $|P(0)|, \ldots, |P(n)|$, l'un au moins est supérieur ou égal à $\dfrac{n!}{2^n}$.

Exercice 13. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n\backslash\{1\}} \frac{1}{1-\omega} = \frac{n-1}{2}$.

Exercice 14. (★★) Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(P'(x)\big)^2 \geqslant P(x)P''(x).$$

Exercice 15 – Dérivée formelle d'une fraction rationnelle. (★★) Soient A, B, C, D dans $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$. Supposons que $AD = BC$.

1) Vérifier que $(A'B - AB')D^2 = (C'D - CD')B^2$.

Cela garantit que la fraction rationnelle $\dfrac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix des polynômes A et B formant la fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$. Ainsi on définit la dérivée formelle de $R = \dfrac{A}{B}$ et on note $R' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.

2) Soient R et F dans $\mathbb{K}(X)$.
   a) Vérifier que $(R+F)' = R' + F'$, $(RF)' = R'F + RF'$.
   b) Vérifier que, lorsque $R \neq 0$, $\left(\dfrac{F}{R}\right)' = \dfrac{F'R - FR'}{R^2}$.
   c) Montrer que, lorsque $R \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $(R^n)' = nR'R^{n-1}$.
   d) Vérifier que, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors la dérivée de P en tant que fraction rationnelle coïncide avec sa dérivée en tant que polynôme.

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$. On définit par récurrence les dérivées successives de R par : $R^{(0)} = R$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R^{(n+1)} = (R^{(n)})'$.

3) (★★★) Application : décomposer $R = \dfrac{1}{X^2+1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ puis montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$R^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Exercice 16. (★★★) On se donne dans cet exercice deux entiers naturels $n < m$. On note $\omega = e^{i\pi/2m}$.

1) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$ est bien définie puis que
$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \text{sgn}(y) \times i\pi$$
où sgn(a) est le signe du réel a, c'est-à-dire 1 si a est strictement positif, et -1 si a est strictement négatif (on justifiera donc pourquoi y est non nulle)

2) Montrer que la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) de $\dfrac{X^{2n}}{1+X^{2m}}$ est :
$$\frac{X^{2n}}{1+X^{2m}} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega^{2k+1}}$$
où, pour tout $k \in [\![0\,;2m-1]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{-\omega^{(2k+1)(2n+1)}}{2m}$.

3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{2m-1} \alpha_k = -\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k$.

4) Donner le signe de $\operatorname{Im}\left(\omega^{2k+1}\right)$ selon la valeur de $k \in [\![0\,;2m-1]\!]$.

5) Montrer que
$$\int_{-x}^{x} \frac{t^{2n}}{1+t^{2m}}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{m\sin\left(\dfrac{2n+1}{2m}\pi\right)}$$
On pourra poser $\beta = \omega^{2n+1}$ pour simplifier les calculs.