Feuille d'exercices n° 25

Formules de Taylor

Exercice 1. (★) En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 2. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} \leqslant \sqrt[5]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} + \dfrac{6x^3}{125}$.

Exercice 3. (★) Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 4. (★★) Trouver une approximation rationnelle à 10^{-4} près de $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 5. (★★) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t) - t| \leqslant \dfrac{t^2}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$.

Exercice 6 – Sommes de Riemann perturbées. (★★)

1) Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Arctan}(x) - x| \leqslant x^2$.
3) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. (★★) Soit $f \in \mathscr{C}^2([0\,;1]\,,\mathbb{R})$ nulle en 0. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 8. (★★★) Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{a^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) Montrer que f est nulle sur $]-a\,;a[$ puis sur $\left]-\frac{a}{2}\,;\frac{3a}{2}\right[$.
2) Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 9 – Intégrale de Gauss. (★★★) Pour tout $t \in [0\,;1]$, on définit la fonction $f_t : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2(t^2+1)}$. On définit ensuite la fonction

$$g : t \in [0\,;1] \longmapsto \int_0^1 \frac{f_t(x)}{1+t^2}\,dt.$$

1) Montrer que pour tous $t \in [0\,;1]$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f_t''(x)| \leqslant 4(4x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 16\mathrm{e}^{-3/4}$.
2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer alors que, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{g(x+h)-g(h)}{h} - \int_0^1 \frac{f_t'(x)}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-3/4}\pi|h|.$$

3) En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter g'.
4) On définit $h : x \longmapsto \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right)^2$. Montrer que $h + g$ est constante.
5) En déduire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

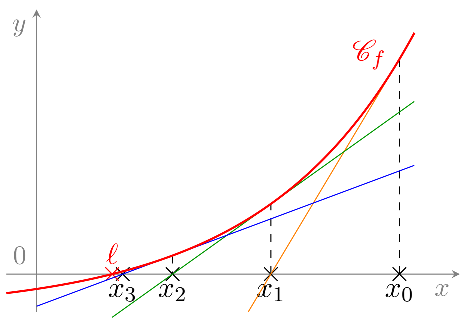
Exercice 10. (★★) Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir une majoration de $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ à partir de M_0 et M_2.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,
$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}.$$
2) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$.
3) En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 11 – Égalité de Taylor-Lagrange. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide, non réduit à un point, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et dérivable $n+1$ fois sur I. On se donne dans la suite a et b deux éléments distincts de I.

1) Montrer qu'il existe un A que l'on explicitera tel que :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{A(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$
2) En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 12 – Méthode de Newton. (★★★) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$. Soit f une fonction dérivable sur $[a\,;b]$ et à valeurs réelles qui s'annule en $x^* \in \,]a\,;b[$ et telle que f' ne s'annule pas sur $[a\,;b]$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Le but de cet exercice est de montrer que, sous l'hypothèse que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $|x_0 - x^*| \leqslant \alpha$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^* à vitesse quadratique, c'est-à-dire
$$\exists K > 0, \quad \exists \lambda \in \,]0\,;1[\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - x^*| \leqslant K\,\lambda^{2^n}.$$
1) On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$ et on pose $\varphi : x \in [a\,;b] \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Remarquer que x^* est un point fixe de φ.
2) Justifier l'existence de $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $|f'(x)| \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$.
3) En déduire que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $|\varphi(x) - x^*| \leqslant \dfrac{M}{2m}|x - x^*|^2$.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{M}{2m}|x_n - x^*|$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$.
   b) Conclure (on prendra $\alpha \leqslant \min\{x^* - a; b - x^*; \frac{2m}{M}\}$ et on précisera K et λ en fonction de m, M et x_0).



Interprétation géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est la solution de l'équation $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$, c'est-à-dire x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_n avec la droite des abscisses.

5) Prenons $f : x \longmapsto x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$ dans cette question.
   a) Vérifier que, alors, les valeurs $m = 2$ et $M = 2$ conviennent. Que prendre pour K, λ et donc pour n afin que $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-8}$?
   b) Calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-8} près en utilisant la méthode de Newton.