Feuille d'exercices n° 20

Fonctions convexes

Exercice 1. (★ à ★★) Sur quels intervalles les fonctions suivantes sont-elles convexes ? Concaves ? Préciser les éventuels points d'inflexion.

1) $x \longmapsto e^{-x^2/2}$,
2) $x \longmapsto \sin(x) - \cos(x)$,
3) $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,
4) $x \longmapsto |x-5| + |2x+3|$,
5) $x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
6) $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
7) $x \longmapsto x + \sin(x)$,
8) $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$,
9) $x \longmapsto \ln\left(\left|\dfrac{x-2}{x+5}\right|\right)$,

Exercice 2. (★) Soit P une application polynomiale de degré 3. Montrer que la courbe représentative de P possède un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 3. (★) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.

Exercice 4. (★) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5. (★) Montrer que, pour tout $(x,y) \in]1\,;+\infty[^2$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 6 – Un grand classique : comparaison de moyennes. (★) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}, \qquad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Le réel A (resp. G, H et Q) est appelé la moyenne arithmétique (resp. géométrique, harmonique et quadratique) des réels $x_1, \ldots, x_n$. En utilisant notamment la concavité de la fonction $\ln$, montrer que $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$.

Exercice 7. (★★)

1) Montrer que $f : x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. En déduire que, pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$$

3) Montrer enfin que, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ strictement positifs,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 8. (★★) Notons T l'ensemble des triplets (α, β, γ) constitués des trois angles d'un triangle. Calculer

$$\sup_{(\alpha,\beta,\gamma)\in T} (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)).$$

Exercice 9. (★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que la fonction

$$g : x \longmapsto \int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (★★) Montrer que la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que

$$\forall (x,y,a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^4, \qquad x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 11 – Inégalités de Hölder et Minkowski. (★★★) Soit $(p,q) \in \left]1\,;+\infty\right[^2$ vérifiant $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1) Montrer que, pour tout $(u,v)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}$.
2) Soient $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |u_i|^p = \sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |u_iv_i| \leqslant 1$.
3) Soient $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des réels. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n |x_iy_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

On pourra poser, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $u_k = x_k\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{-1/p}$ *et* $v_k = y_k\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{-1/q}$.

4) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

On commencera par remarquer que $|x_k+y_k|^p \leqslant |x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}+|y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}$ *pour tout* $k\in[\![1\,;n]\!]$,

Exercice 12 – Une définition équivalente de la convexité. (★) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble épi$(f) = \{(x,y)\in I\times\mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$. Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe (on dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^2$ est convexe si, pour tous $t\in[0\,;1]$ et $(x,y)\in E^2$, $(1-t)x+ty\in E$).

Exercice 13 – La convexité ne passe pas à l'union. (★) Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ mais non convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que si f est dérivable, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. (★) Soient f et g deux fonctions convexes sur des intervalles respectifs I et J telles que $f(I)\subset J$.

1) Montrer que, si g est croissante, alors $g\circ f$ est convexe sur I.
2) Qu'en est-il si g n'est pas croissante ?

Exercice 15 – Réciproque d'une fonction convexe. (★★) On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe injective. Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 16. (★★)

1) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $f(a)>f(b)$. Montrer que

$$\forall x \in \left]-\infty\,;a\right[, \qquad f(x) \geqslant f(a)+(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

   Illustrer par un dessin.
2) En déduire qu'une fonction convexe non croissante tend vers $+\infty$ en $-\infty$.
3) Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante.
4) Montrer qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}_-$ est croissante.
5) Donner un exemple d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}_-$ mais qui n'est pas constante.

Exercice 17 – Extrema des fonctions convexes. (★★★) On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Les questions sont indépendantes.

1) On suppose que f admet un minimum local en x_0. Montrer que c'est en fait un minimum global.
2) On suppose que f est dérivable. Soit $x_0 \in I$. Montrer que f admet un minimum global en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
3) Montrer que si f admet un maximum global, alors elle est constante.
4) On note $m(f)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points en lesquels f admet un minimum global.
   a) Montrer que $m(f)$ est un intervalle (éventuellement vide).
   b) Montrer que si $m(f)$ est non vide et majoré (respectivement minoré) alors il contient sa borne supérieure (respectivement supérieure).
   c) Montrer que $m(f)$ peut être vide.
   d) Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, montrer avec un exemple graphique que $m(f)$ peut être n'importe quel intervalle de la forme $[a\,;b]$, $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;a]$.

Exercice 18. (★★) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.
2) Montrer que, si $\ell \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x) - \ell x$ admet une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.
3) Montrer avec des exemples explicites qu'on peut avoir $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$.

Exercice 19 – Fonctions log-convexes. (★★)

1) Soient $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante et que $\varphi(I)$ est inclus dans J. Montrer que $g \circ \varphi$ est convexe. Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

Dans la suite de l'exercice, on dira qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est *logarithmiquement convexe* (en abrégé : *log-convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

2) À l'aide de la question précédente, montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
3) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si f est log-convexe alors f^α est convexe pour tout réel $\alpha > 0$. La réciproque est vraie : cf. exercice 31 du TD n° 26.
4) Montrer qu'un produit de fonctions log-convexes est encore log-convexe.
5) On s'intéresse à présent à la somme de fonctions log-convexes. On se donne dans la suite deux fonctions f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivables deux fois.
   a) Montrer que f est log-convexe si et seulement si f'/f est croissante.
   b) Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f \times f'' - f'^2$ est positive.
   c) On suppose que A et A' sont deux réels strictement positifs. Montrer que si $AC - B^2 > 0$ et $A'C' - B'^2 > 0$ alors
   $$(A + A')(C + C') - (B + B')^2 > 0$$
   Étendre ce résultat au cas où les inégalités sont larges (on pourra introduire des trinômes du second degré dont ces quantités sont les opposés des discriminants).
   d) En déduire que si f et g sont log-convexes, alors $f + g$ est encore log-convexe.

Ce résultat est toujours vrai, même si les deux fonctions ne sont pas dérivables deux fois, mais c'est un peu plus difficile à montrer, et la démonstration proposée ici est particulièrement élégante.

Exercice 20 – Fonctions mid-convexes. (★★★) Soient I est un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

A l'aide de l'exercice 11 du chapitre 13, montrer que f est convexe sur I.