Feuille d'exercices n° 4

Fonctions

I Résultats généraux sur les fonctions

Exercice 1. (★) Déterminer $f(A)$ dans les cas suivants (sans avoir recours à une étude de fonctions) :

1) $f : x \longmapsto x^2$ et $A =]-3\,;+\infty[$,
2) $f : x \longmapsto 2 - x^3$ et $A =]2\,;+\infty[$,
3) $f : x \longmapsto |x+2|$ et $A = [-4\,;-1/2[$,
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $A =]-4\,;0[\cup]0\,;3]$,
5) $f : x \longmapsto 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $A =]-3\,;0[\cup]0\,;2]$.

Exercice 2. (★) Pour les fonctions f et g définies par les expressions suivantes, donner le domaine de définition et une expression de $g \circ f$ et $f \circ g$. On commencera bien entendu par donner les domaines de définition de f et de g.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2$,
2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ et $g(x) = x^6$,
3) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$,
4) $f(x) = \mathrm{th}(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,
5) $f(x) = (\ln(x))^2$ et $g(x) = x^2 - 7x + 10$,
6) $f(x) = \mathrm{th}(x)$ et $g(x) = \ln(x^2-1)$,
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x^2-1)$,
8) $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 3. (★★) Montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. En quel(s) réel(s) est-il atteint ? Est-elle majorée ?

Exercice 4. (★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f \circ f$ est croissante et la fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 5. (★) Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto 1 + \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,(x-3)$.
3) $x \longmapsto -\ln(1+x)$.
4) $x \longmapsto 1 - \sqrt{1-x}$.

Exercice 6. (★) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{(1+\mathrm{e}^{\alpha x})^2}$ est paire.

Exercice 7. (★) Soit E une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f+g$ et fg ?

Exercice 8. (★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Prouver que $x \longmapsto f(\omega x)$ est périodique, et préciser une période.

Exercice 9. (★★) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone et périodique est constante.

Exercice 10. (★★) Définissons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ par

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous en reparlerons dans la feuille d'exercice n° 21 et verrons notamment qu'elle n'est continue en aucun point.

1) A quoi ressemblerait la courbe représentative de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (sans avoir recours à la dérivation puisqu'elle n'est continue nulle part) ?
2) Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est périodique et que tout rationnel est une période.
3) Y a-t-il une plus petite période ?

Exercice 11. (★) Donner l'équation de la droite (D) du plan passant par les points de coordonnées $(1,5)$ et $(-3,2)$. Donner l'équation de la droite (Δ) du plan de coefficient directeur $-1/2$ et passant par le point $(4,6)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de (D) et (Δ).

II Calculs de limites et de dérivées

Exercice 12. (★ à ★★) Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$,
2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^2}{\mathrm{e}^{3x}}$,
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$,
4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2|x|}{x}$,
5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\times\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$,
6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$,
7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[7]{x}\mathrm{e}^{-\sqrt[5]{x}}$,
8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\ln(x)^2}$,
9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$,
10) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x}$,
11) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{\mathrm{sh}(5x)}$,
12) $\displaystyle\lim_{x\to0} \ln\left(\frac{\mathrm{th}(x)}{x}\right)$.

Exercice 13. (★ à ★★) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression de la dérivée).

1) $x\longmapsto \mathrm{e}^{6x^{2024}+3x-5}$,
2) $x\longmapsto \sqrt[3]{x}\ln(x^2+1)$,
3) $x\longmapsto \dfrac{\pi^x}{x^\pi}$,
4) $x\longmapsto \mathrm{th}(\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x)))$,
5) $x\longmapsto \dfrac{1}{(\ln(2x^2-3x-1))^5}$,
6) $x\longmapsto (2-x^{\mathrm{e}})^{3/7}$,
7) $x\longmapsto (1-x)^{1/x}$,
8) $x\longmapsto \sqrt[4]{1-\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}}$,
9) $x\longmapsto x^{x^x}$,

On ne cherchera pas à déterminer la dérivabilité en un point du domaine de définition où les théorèmes généraux d'opérations n'ont pas permis de conclure (on réserve cela pour le TD n° 22).

Exercice 14. (★) Soient $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur des domaines à déterminer et expliciter leurs dérivées successives.

1) $x\longmapsto (x+b)^n$,
2) $x\longmapsto \sqrt[n]{x+b}$,
3) $x\longmapsto \dfrac{1}{(x+b)^n}$,
4) $\ln$,
5) $x\longmapsto (ax+b)^\alpha$,
6) $x\longmapsto e^{ax+b}$,
7) $x\longmapsto \mathrm{sh}(ax+b)$,
8) $x\longmapsto \mathrm{ch}(ax+b)$,

Exercice 15. (★★) Pour tout réel m, on note Γ_m le graphe de la fonction $x\longmapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$. Lorsque m parcourt $\mathbb{R}$:

1) Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
2) Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes.

III Études de fonctions

Exercice 16. (★★ à ★★★) Étudier (domaine de définition, variations, limites, éventuelles asymptotes, branches paraboliques, convexité, courbes) les fonctions suivantes.

1) $x\longmapsto \ln(x^2+x+2)$,
2) $x\longmapsto x^2-8x+15-|4-x|$,
3) $x\longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$,
4) $x\longmapsto -\ln(|x^2-3x+2|)$,
5) $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$,
6) $x\longmapsto \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$,
7) $x\longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$,
8) $f : x\longmapsto \left(x^2-1\right)\ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$,
9) $f : x\longmapsto x-\sqrt{x^2-1}$,
10) $f : x\longmapsto \dfrac{\ln\left(\sqrt[7]{1+x^{\mathrm{e}}}\right)}{x}$,
11) $f : x\longmapsto \mathrm{e}^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$,
12) $x\longmapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$,
13) $x\longmapsto x^{x^3}$.

IV Inégalités, égalités, équations, inéquations

Exercice 17. (★) Résoudre les équations ou inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, suivantes :

1) $2e^x - 35e^{-x} = 9$,
2) $2(\ln(x))^2 = 12 + 5\ln(x)$,
3) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
4) $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$,
5) $\ln(x) - \log(x) = 1$,
6) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$,
7) $\ln(-x-3) - \ln(x-5) + \ln(x+4) \geqslant 0$,
8) $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$,

Exercice 18. (★★) Résoudre l'équation $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. (★) Montrer que la fonction $\dfrac{1}{\mathrm{ch}}$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. (★★★) Soit $a > 0$. Donner le nombre de points fixes de $x \longmapsto a^x$ selon la valeur de a.

Exercice 21. (★) Résoudre les inéquations, d'inconnue $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $2^n \geqslant 1000000$,
2) $\dfrac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} \geqslant \dfrac{7}{2}$,
3) $\dfrac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2)$.

Exercice 22. (★★) Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Résoudre l'inéquation $\log_a(x) > \log_{a^2}(2-3x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 23. (★) Montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in [0\,;1]$, $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{2}$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{th}(x) \leqslant \dfrac{16}{25}x + \dfrac{15-16\ln(2)}{25}$.
3) $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant \dfrac{(x-1)(3-x)}{2}$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} \leqslant \sqrt[3]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{3}$.

Exercice 24. (★) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier les égalités suivantes :

1) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$,
2) $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$,
3) $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 2\,\mathrm{ch}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})$,
4) $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(y) = 2\,\mathrm{sh}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{sh}(\frac{x-y}{2})$,
5) $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2\,\mathrm{sh}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2})$,
6) $\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(y) = 2\,\mathrm{ch}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{sh}(\frac{x-y}{2})$,
7) $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

Exercice 25. (★★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 26. (★★) Dans l'exercice 25 du TD n° 3, nous avons montré que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{4x^2 - 2x^4 + 3}{x^4 + x^2 - x + 1} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}.$$

est majoré et minoré. À l'aide de factorisation de polynômes, retrouver la valeur du minimum.

V Bijections et réciproques

Exercice 27. (★) Justifier que les fonctions suivantes sont bijectives et expliciter leur réciproque.

1) $x \longmapsto \dfrac{3+2x}{x-5}$ de $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2) $x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$ de $\mathbb{R}_+$ sur $[1\,;+\infty[$.
3) $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{4-x}{2} & \text{si} \quad z \in \,]0\,;2[\\ (x-2)^2 & \text{si} \quad z \in [2\,;3] \end{cases}$ de $]0\,;3]$ sur $[0\,;2[$.

Exercice 28. (★★) Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) puis expliciter f^{-1} sur J.

1) $x \longmapsto \sqrt{1+3(\ln(x))^2}$, 2) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}$, 3) $x \longmapsto \ln(x^{3/4}-1)$.

Exercice 29. (★★)

1) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$. Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argth. Représenter graphiquement Argth. De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argth et calculer Argth'.
2) Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argsh. Représenter graphiquement Argsh. De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argsh et calculer Argsh'.
3) Montrer que ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1\,;+\infty[$. Représenter graphiquement Argch. Expliciter sa bijection réciproque, que l'on note Argch. De deux façons différentes, étudier la dérivabilité de Argch et calculer Argch'.

Exercice 30. (★★) Considérons $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{1-x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Notons $g = f^{-1}$.
2) Étudier la dérivabilité de g et exprimer g' en fonction de g (et sans exponentielle).
3) Montrer que g admet un point d'inflexion en un point à préciser.
4) Représenter graphiquement l'allure du graphe de g.

On attendra d'avoir vu le prochain chapitre pour traiter cet exercice puisqu'il fait intervenir des fonctions trigonométriques.

Exercice 31. (★★) Notons $u : t \longmapsto \dfrac{1+\ln(t)}{t}$.

1) a) Démontrer que la fonction est une bijection strictement croissante de $]0\,;1]$ sur $]-\infty\,;1]$.
   b) Montrer que sa fonction réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;1[$.
2) En déduire l'existence d'une fonction $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel θ, $r(\theta) \in \,]0\,;1]$ et
$$r(\theta)e^{-r(\theta)\cos(\theta)} = \frac{1}{e}.$$
3) a) Calculer de manière simple $r(0)$ et $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   b) Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire.
   c) Montrer que r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;2\pi[$ et que :
$$\forall \theta \in \,]0\,;2\pi[\,, r'(\theta) = \frac{r(\theta)^2\sin(\theta)}{r(\theta)\cos(\theta)-1}.$$