Feuille d'exercices n° 28

Espaces vectoriels

Dans toute cette feuille d'exercices, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ces ensembles sont-ils des espaces vectoriels ?

Exercice 1 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. (★) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2) $\mathbb{Z}^2$.
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$.
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$.
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leqslant y\}$.
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 1 + 2y\}$.
7) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
8) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 0\}$.
9) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 0\}$.
10) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x + 2z = 0\}$.

Exercice 2 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. (★) Les sous-ensembles constitués des triplets (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
2) $x_3 = 0$.
3) $x_3 = 1$.
4) $|x_1| = |x_2| = |x_3|$.
5) $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0$.
6) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.
7) $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$.
8) ${x_1}^2 + x_2 + x_3 = 0$.
9) $x_1 x_2 x_3 = 0$.
10) $x_1 = x_2 = x_3$.
11) $|x_1 + x_2| + x_3 = 0$.
12) $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0$.
13) $\sin(x_1) + e^{x_2} - x_3^3 = 0$.
14) $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$.
15) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$
16) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{ou} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$

Exercice 3 – Espaces de matrices. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet exercice sont supposées à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des coefficients diagonaux est nulle.
2) L'ensemble des matrices carrés inversibles dont l'inverse est égal à la transposée.
3) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des coefficients diagonaux est égale à 2025.
4) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des carrés des coefficients diagonaux est nulle.
5) L'ensemble des matrices carrés dont la somme des carrés des coefficients diagonaux est nulle.
6) L'ensemble des matrices carrées de diagonale nulle.
7) L'ensemble des matrices carrées M telles que $AM + MA = 0$.
8) L'ensemble des matrices carrées M telles que $M + M^T = 2\mathrm{I}_n$.
9) L'ensemble des matrices carrées M telles que $M^2 = M$.

Exercice 4 – Espaces de polynômes. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ non nul. Soit $a \in \mathbb{K}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) L'ensemble des polynômes de degré n.
2) L'ensemble des polynômes qui divisent A.
3) L'ensemble des polynômes multiples de A.
4) L'ensemble des polynômes dont a est racine de multiplicité n.
5) L'ensemble des polynômes dont a est racine de multiplicité au moins n.
6) L'ensemble des polynômes scindés ou nuls (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
7) L'ensemble des polynômes P tels que $X^2 P'' + nXP' = P - P(3)$.
8) L'ensemble des polynômes P tels que $P + X^2 = XP'$.

Exercice 5 – Espaces de fonctions. ($\bigstar$) Les ensembles suivants sont supposés être inclus dans $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ avec I un intervalle non vide et non réduit à un point. Sont-ils des espaces vectoriels ?

1) L'ensemble des fonctions dérivables en 2025.
2) L'ensemble des fonctions continues en 2025.
3) L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0)+f(1)=f'(0)$.
4) L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I.
5) L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ mais pas $\mathscr{C}^2$.
6) L'ensemble des fonctions convexes.
7) L'ensemble des fonctions convexes ou concaves.
8) L'ensemble des fonctions non dérivables en 0.
9) L'ensemble des fonctions f telles que $f(0)=1$.
10) L'ensemble des fonctions f telles que $f(1)=0$.
11) L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
12) L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
13) L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.
14) L'ensemble des fonctions nulles en 0 et en 1.
15) L'ensemble des fonctions nulles en 0 ou en 1.
16) L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en $+\infty$.
17) ($\bigstar\bigstar$) L'ensemble des fonctions lipschitziennes.
18) ($\bigstar\bigstar$) L'ensemble des fonctions uniformément continues.
19) L'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle.
20) L'ensemble des fonctions majorées.
21) L'ensemble des fonctions bornées.
22) L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'+y=1$.
23) L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(1-x)$.
24) L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=1+f(-x)$.
25) L'ensemble des fonctions continues sur $I=[0\,;1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
26) ($\bigstar\bigstar$) L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie ou infinie en $+\infty$.

Exercice 6 – Espaces de suites. ($\bigstar$) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) L'ensemble des suites convergentes.
2) L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
3) L'ensemble des suites qui convergent vers 1.
4) L'ensemble des suites qui divergent.
5) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n=\mathrm{o}(n)$.
6) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n\sim n$.
7) L'ensemble des suites qui admettent 0 comme valeur d'adhérence.
8) L'ensemble des suites positives.
9) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0+u_1=0$.
10) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0u_1=0$.
11) L'ensemble des suites bornées.
12) L'ensemble des suites arithmétiques.
13) L'ensemble des suites géométriques.
14) L'ensemble des suites croissantes.
15) L'ensemble $\{(a(-1)^n+b\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}\,|\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.
16) L'ensemble des suites monotones.

Exercice 7. ($\bigstar\bigstar$) Montrer que l'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\middle|\,\sum u_n^2 \text{ converge}\right\}$ est un espace vectoriel.

II Familles de sous-espaces vectoriels

Exercice 8. (★) Pour chacune des familles suivantes, déterminer une base de l'espace qu'elle engendre puis caractériser cet espace à l'aide d'une ou de plusieurs équations.

1) $\big((1,1,0,-1),(2,1,-1,2),(1,-1,-2,3)\big)$.
2) $\big(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\big)$.

Exercice 9. (★) Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (x_3,x_1) lorsque $n\geqslant 3$.
2) $(x_1,2x_1+x_4,x_4)$ lorsque $n\geqslant 4$.
3) $(x_1,2x_2,x_3)$ lorsque $n\geqslant 3$.
4) $(x_1,x_1+x_2,\dots,x_1+x_2+\cdots+x_n)$.
5) $(x_1-x_2,x_2-x_3,\dots,x_n-x_1)$.
6) (★★) $(x_1+x_2,x_2+x_3,\dots,x_n+x_1)$.

Exercice 10. (★) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Donner une CNS pour que $(1,e^{i\theta})$ soit une famille libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 11. (★) Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

1) $(x\mapsto x^2,\cos,\exp,\ln)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+*}}$.
2) $(\cos,\sin,x\mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3) $(\cos^2,x\mapsto\cos(2x),x\mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4) $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}},\sin^2,\cos^2,x\mapsto\cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5) $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}},\sin,\cos,x\mapsto\cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
6) $((1,0,0,2),(0,2,0,3),(1,0,1,0))$ dans $\mathbb{R}^4$.
7) $((3,2,1,4),(1,1,1,3),(4,2,0,3))$ dans $\mathbb{R}^4$.
8) $((1,5,6),(2,3,0),(3,8,6),(1,0,0))$ dans $\mathbb{R}^3$.
9) $((2,2,1),(1,1,2),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
10) $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
11) $((1,2,0),(0,1,1),(2,0,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
12) $((1,0,1),(2i,2,0),(0,1,-i))$ dans $\mathbb{C}^3$.
13) $((2^n)_n,((-1)^n)_n,(1)_n)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
14) $((2^n)_n,((-1)^n)_n,((-1)^{n+1})_n)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
15) $\Big((n^k)_{n\in\mathbb{N}}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
16) $((1)_n,(n)_n,(2^n)_n,(3^n)_n)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
17) $(\cos,\sin,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
18) $(t\mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
19) $\left(x\mapsto\dfrac{1}{1+x^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.
20) $\big(x\mapsto x^k e^{kx}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
21) $\Big(x\mapsto e^{-kx^2}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
22) $\big(x\mapsto\cos^k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 12. (★★) Soit I un intervalle non trivial et soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue non constante. Montrer que $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Exercice 13. (★) Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer que $\big((X-a)^k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Exprimer les coordonnées d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ dans cette base.

Exercice 14. (★) Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{R}$ deux à deux distincts. Introduisons les polynômes $P_0=1$, $P_1=(X-a)$ et $P_2=(X-a)(X-b)$. Déterminer les coefficients de tout polynôme de $\mathbb{K}_2[X]$ dans la base (P_0,P_1,P_2) en fonction de $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.

Exercice 15. (★)

1) Montrer que $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base.
2) Montrer que $(X^3+X^2-X-1,X^3-X^2+1,X^3-X^2+X,X^3+2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

Exercice 16. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$.
On commencera par traiter les cas où $n=2$ puis $n=3$.

Exercice 17. (★) Montrer que $\mathrm{Vect}(x\mapsto 1,\mathrm{Arccos},\mathrm{Arcsin})$ admet une base à deux éléments de $\mathbb{R}^{[-1\,;1]}$.

Exercice 18. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{E}=\{x\longmapsto P(x)\sin(x)+Q(x)\cos(x)\,|\,(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.

Exercice 19. (★) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

1) $\{x \mapsto A\cos(x+\varphi) \mid (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+z=0\}$.
3) $\{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1-X) = P(X)\}$.
4) $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P\left(X^2\right) = (X^3+1)P\}$.
5) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
6) $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(2)\}$.
7) $\left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \;\middle|\; M\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} M\right\}$.
8) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$.
9) $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
10) $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(1) = P(0)\}$.

III Propriétés de sous-espaces vectoriels

Exercice 20. (★★) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 21. (★★) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subset E_{n+1}$. Montrer que pour tous $n \leqslant p$, E_n est inclus dans E_p puis montrer que $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 22. (★) Soient a et b deux réels. Posons $e_1 = (1,1,-1)$, $e_2 = (1,2,4)$, $e_3 = (3,-1,a)$ et $e_4 = (2,3,b)$ (ce sont des vecteurs de $\mathbb{K}^3$). Déterminer a et b pour qu'on ait $\mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(e_3,e_4)$.

Exercice 23. (★★) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 24. (★★★) Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 25. (★★) Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Notons $\overline{F}$ le complémentaire de F.

1) $\overline{F}$ est-il un espace vectoriel ?
2) Montrer que, pour tous $x \in F$ et $y \in \overline{F}, x+y \in \overline{F}$. En déduire que $E = \mathrm{Vect}\left(\overline{F}\right)$. Illustrer par un dessin.

Exercice 26. (★) Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(A\cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

IV Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 27. (★) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1+F_2 = F_1\cap F_2$ si et seulement si $F_1 = F_2$.

Exercice 28. (★★)

1) Soient F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F_1\cap F_2)+(F_1\cap F_3) \subset F_1\cap(F_2+F_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2) Montrer que $F_1+(F_2\cap F_3) \subset (F_1+F_2)\cap(F_1+F_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si $F_1 \subset F_2$, alors il y a égalité.

Exercice 29. (★★) Soient $(u,v) \in E^2$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F+\mathrm{Vect}(u) = F+\mathrm{Vect}(v)$ si et seulement s'il existe $x \in F$ et deux scalaires α et β non nuls tels que $x+\alpha u+\beta v = 0$.

Exercice 30. (★★) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, notons E_a l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'annulant en a.

1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2) Soient $a \neq b$. Montrer que $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = E_a+E_b$.
3) La somme de E_a et E_b peut-elle être directe ?

Exercice 31. (★★) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1+F_2 = E$. Soit F_3 un supplémentaire de $F_1\cap F_2$ dans F_1. Montrer que $F_2\oplus F_3 = E$.

Exercice 32. (★) Montrer à chaque question que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E.

1) $F_1 = \mathrm{Vect}(1,2)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(-1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2) $F_1 = \{(x,y,z) \mid x+z=0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3) $F_1 = \{(x,2x,3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(x+y, x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-y+z=0\}$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(0,1,0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5) $F_1 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(1,2,3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
6) $F_1 = \mathrm{Vect}(1,\dots,1)$ et $F_2 = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
7) (★★) $F_1 = \mathrm{Vect}(1,2,\dots,2n)$ et $F_2 = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
8) F_1 l'ensemble des suites constantes et F_2 l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans E l'ensemble des suites convergentes.
9) $F_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $F_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
10) F_1 l'ensemble des fonctions affines et $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E = \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
11) F_1 l'ensemble des fonctions nulles en 0 et $\pi/2$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$ dans $E = \mathscr{C}^0([0\,;\pi],\mathbb{R})$.
12) F_1 l'ensemble des fonctions constantes et F_2 l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
13) F_1 l'ensemble des fonctions constantes et $F_2 = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0 \right\}$ dans $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

V Autour de la définition des espaces vectoriels

Exercice 33. (★) Notons (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les quatre propriétés de la définition d'un espace vectoriel, comme dans le cours.

1) Munissons $E = \mathbb{C}^n$ de l'addition usuelle et du produit externe $\cdot$ défini par :
$$\forall(\lambda,(x_1,\dots,x_n)) \in \mathbb{C}\times E, \qquad \lambda\cdot(x_1,\dots,x_n) = (\mathrm{Re}(\lambda)\times x_1,\dots,\mathrm{Re}(\lambda)\times x_n).$$
Montrer que $(C_1),(C_2),(C_3)$ sont vérifiées mais pas (C_4).
2) Munissons $E = \mathbb{K}^n$ de l'addition usuelle et du produit externe $\cdot$ défini par :
$$\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E, \qquad \lambda\cdot x = x.$$
Montrer que $(C_1),(C_2),(C_4)$ sont vérifiées mais pas (C_3).
3) Notons $\mathcal{D} = \{(0,z) \,|\, z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$. Munissons $E = \mathbb{C}^2$ de l'addition usuelle et du produit externe $\cdot$ défini par :
$$\forall(\lambda,(x,y)) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^2, \qquad \lambda\cdot(x,y) = \begin{cases} (\lambda x_1, \lambda x_2) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ (\overline{\lambda} x_1, \overline{\lambda} x_2) & \text{sinon} \end{cases}$$
Montrer que $(C_1),(C_3),(C_4)$ sont vérifiées mais pas (C_2).
4) Munissons $E = \mathbb{K}^n$ de l'addition usuelle et du produit externe $\cdot$ défini par :
$$\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E, \qquad \lambda\cdot x = (0,\dots,0).$$
Montrer que $(C_2),(C_3),(C_4)$ sont vérifiées mais pas (C_1).

Ainsi les hypothèses (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) sont indépendantes (c'est-à-dire que trois d'entre elles peuvent être vérifiées sans que la quatrième le soit) si bien qu'elles sont bien toutes indispensables dans la définition d'un espace vectoriel.

Exercice 34 – Complexifié d'un espace vectoriel réel. (★★) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E\times E$ de l'addition usuelle :
$$\forall((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in E^2, \quad (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$
et de la multiplication externe par les complexes définie par :
$$\forall((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in E^2, \quad (a+ib)\cdot(x,y) = (a\cdot x - b\cdot y, b.x + a\cdot y)$$
Montrer que $E\times E$, muni de ces deux lois, est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.