Feuille d'exercices n° 11

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 – Équations du premier ordre. (★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' - 2y = -7$,
2) $y' + y = x^2$,
3) $y' - \dfrac{2}{x}y = x^3$,
4) $y' - \dfrac{y}{x^2} = 2x - 1$,
5) $y' + \cos(x)y = \sin(2x)$,
6) $y' - \mathrm{th}(x)y = \mathrm{sh}(x)$.

Exercice 2 – Équations du premier ordre. (★★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(1-x^2)y' + xy = -3x$,
2) $x(1+x^2)y' + y = -x$,
3) $y'\cos(x) - y\sin(x) = \sin(2x)$,
4) $x\ln(x)y' - y = 2x^2(\ln(x))^2$,

On donnera l'ensemble des solutions sur chaque intervalle où la fonction « devant y' » ne s'annule pas. On ne cherchera pas à étudier les « recollements » de solutions mais on pourra reprendre cet exercice dans le chapitre 22.

Exercice 3. (★) Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\left\{\begin{array}{rcl} y' + 3y & = & \sin(x) \\ y(0) & = & -1 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} y' + 2xy & = & x^3 \\ y(1) & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 4 – Équations du second ordre. (★) Soient $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - y' - 6y = x^2 - x + 5$,
2) $y'' + 9y = 3x^2 + 2$,
3) $y'' - y = 3x\cos(x)$,
4) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x + \cos(3x)$,
5) $y'' + 4y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$,
6) $y'' + 3y' + 4y = \mathrm{sh}(2x)$,
7) $y'' + 3(1-\mathrm{i})y' - 5\mathrm{i}y = 4\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,
8) (★★) $y'' + \omega^2 y = \sin^3(x)$,
9) (★★★) $y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

À part pour la question 7, on ne cherchera que les solutions à valeurs réelles.

Exercice 5. (★) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'' + 9y & = & x^2 + 1 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6 – Une équation différentielle d'ordre 3. (★★) On cherche les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle (E) : $y''' = y$.

1) Donner l'ensemble des solutions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (F) : $y' = y$.
2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F).
3) En déduire les solutions de (E).

Exercice 7. (★) Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & \omega y' \\ y'' & = & -\omega x' \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

En considérant la fonction $u = x' + \mathrm{i}y'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 8. (★) Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'' & = & f' + g' - g \\ g'' & = & f' + g' - f \end{array}\right.$$

On pourra s'intéresser aux fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.

Exercice 9. (★★)

1) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du second ordre, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
2) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du premier ordre, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice 10. (★★★)

1) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du second ordre, trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x - t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$
2) En se ramenant à une équation différentielle linéaire du premier ordre, trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11 – Une EDL du second ordre à coefficients non constants. (★★★) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = (x - 1)^2.$$

On pourra commencer par montrer qu'une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $z : t \longmapsto y(e^t)$ est solution d'une EDL du second ordre à préciser.

Exercice 12 – Une équation différentielle non linéaire. (★★) Considérons l'équation différentielle $(E) : -x^2 y' + xy = y^2$ sur $I =]1 ; +\infty[$. En procédant au changement de fonction inconnue $z = \dfrac{1}{y}$, déterminer les solutions qui ne s'annulent pas sur I.

Exercice 13 – Une équation différentielle non linéaire. (★★) À l'aide du changement de fonction inconnue $z = y^2$, résoudre l'équation différentielle $(E) : yy' + y^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$.

Exercice 14. (★) Montrer que toute solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ou du second ordre à coefficients constants est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 15. (★★) Soient a et b des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que a est impaire sur $\mathbb{R}$ et que b est paire sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

1) Soit f une solution de (E). Montrer que $g : x \longmapsto -f(-x)$ est aussi solution de (E).
2) En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Exercice 16. (★★) Soit $T > 0$. Soient a et b deux fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Exercice 17 – Méthode de variation de la constante pour les EDL du second ordre. (★★) Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Considérons $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$. Soit r un complexe vérifiant $r^2 + ar + b = 0$. Déterminer une solution de (E) qui s'écrit sous la forme $x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{rx}$, avec λ deux fois dérivable sur I.