Feuille d'exercices n° 19

Dérivation

I Étude de dérivabilité, calcul de dérivées, utilisation de la dérivée

Exercice 1. (★) Refaire l'exercice 13 du TD n° 4 et l'exercice 9 du TD n° 5, en étudiant cette fois la dérivabilité en les points où les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure directement sur la dérivabilité.

Exercice 2. (★★) Donner le domaine de définition des fonctions suivants et les prolonger éventuellement par continuité. Préciser ensuite les intervalles sur lesquels elles sont dérivables et calculer leurs dérivées (préciser s'il y a des dérivées à gauche ou à droite). Sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$?

1) $x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,

2) $x \longmapsto x\ln(x) - x$,

3) $x \longmapsto \sqrt{x^3 - x^2}$,

4) $x \longmapsto 7x\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}$,

5) $x \longmapsto \sqrt[4]{x}\dfrac{\sqrt{x}}{x^{7/4}}$,

6) $x \longmapsto x^{1/\ln(x)}$,

7) $x \longmapsto x^x$,

8) $x \longmapsto x^{x^3}$,

9) $x \longmapsto (x^8)^{x^3}$,

10) $x \longmapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$,

11) $x \longmapsto (1-x^2)\,\mathrm{Arcsin}(x)$,

12) $x \longmapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|}$,

13) $x \longmapsto 1 - \cos(\sqrt{|x-2|})$,

14) $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$

15) $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(|x|)} & \text{si} \quad x \in \,]-1\,;1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Pour la question 13, on pourra utiliser la limite $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$*, montrée dans l'exercice 34. Pour la question 15, on pourra évaluer la fonction en les points* $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ *et* $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercice 3. (★) Calculer les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x) - \sin(7x)}{\sin(x) + \sin(9x)}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}(2x)}{\mathrm{Arcsin}(5x)}, \qquad 3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\ln(x))}{x\,\mathrm{Arccos}(x)}, \qquad 4)\ \lim_{x\to 2} \frac{x\sin(x-2)}{x^2+x-6}$$

Exercice 4. (★) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Soit $x_0 \in I$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'existence des limites suivantes et les calculer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+h^2)}{h}, \quad \lim_{x\to a} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}.$$

Exercice 5. (★) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Exercice 6. (★★) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

II Dérivées successives

Exercice 7. (★) Montrer que $x \longmapsto x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives.

Exercice 8. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. En linérisant, donner la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\sin^5$.

Exercice 9. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de l'exponentielle complexe, démontrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\sin$ $x \longmapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 10. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \longmapsto (x-a)^n(x-b)^n$.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 11. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\varphi_n : x \longmapsto x^n \ln(x)$, $f_n : x \longmapsto x^n$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Justifier que φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Exprimer φ'_{n+1} en fonction de φ_n et f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n^{(n)} = n!(\ln(x) + H_n)$
4) En calculant $\varphi_n^{(n)}$ autrement, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = H_n$.

Exercice 12. (★) Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$. Montrer que $f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}\mathrm{e}^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13. (★★) Soit $x \in \mathbb{R}\Big\backslash\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Exercice 14. (★★) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}.$$
2) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété « $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(0) = 0$ » est vraie.

Exercice 15. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions n fois dérivables telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

III Raccordement de solutions d'équations différentielles

Exercice 16. (★★) Reprendre l'exercice 2 du TD n° 11 en résolvant les quatre équations différentielles sur l'entièreté de leur ensemble de définition.

Exercice 17. (★★) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = |x| + 1$ (on étudiera l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).

IV Fonctions Lipschitziennes (pas forcément dérivables)

Exercice 18. (★) Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\lambda f + g$ est lipschitzienne.
2) Montrer que si f et g sont bornées, alors $f \times g$ est lipschitzienne. Et si f ou g n'est pas bornée ?

Exercice 19. ($\bigstar$) Soit f une fonction lipschitzienne définie sur un intervalle I. On note

$$E = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \ f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$$

1) Montrer que E admet une borne inférieure qui est un minimum. Notons-la $\mathrm{Lip}(f)$. Autrement dit que f est $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne.
2) Montrer que $E = [\mathrm{Lip}(f)\,;+\infty[$.
3) Donner une CNS pour que $\mathrm{Lip}(f) = 0$.

Exercice 20. ($\bigstar$) Montrer que $x \longmapsto \sin(x^2)$ n'est pas Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. ($\bigstar\bigstar$) Soit f une fonction 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Notons A l'ensemble des points fixes de f.
1) Montrer que A est un intervalle.
2) Montrer que, si A est borné et non vide, alors A est un segment.

Exercice 22. ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction

$$M : u \in \mathbb{R} \longmapsto \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \big(ux - f(x)\big)$$

est bien définie et est 1-Lipschitzienne

V Extrema, théorème de Rolle, égalité et inégalités des accroissements finis

Exercice 23. ($\bigstar$) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in \,]0\,;1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 24. ($\bigstar$) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes : $\sqrt{10001} \approx 100$, $0.99^2 \approx 1$ et $\cos(1) \approx \dfrac{1}{2}$.

Exercice 25. ($\bigstar$) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big((x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\mathrm{e}^{1/x}\Big)$.

Exercice 26. Sans faire d'études de fonction et sans utiliser d'arguments de convexité, montrer que :
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\mathrm{e}^x$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \leqslant 1 + x\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 27. ($\bigstar$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable (mais pas forcément deux fois) sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer les variations de $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 28 – Résultat important sur les limites de dérivées. ($\bigstar$) Soit $\ell \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\}$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$.

Exercice 29. ($\bigstar$) Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer que f'' s'annule sur $]-1\,;1[$.

Exercice 30. ($\bigstar\bigstar$) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 31. ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,;1]$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]-1\,;1[$, $f'(c) = 4c + 1$.

Exercice 32. ($\bigstar\bigstar$) Soit f une fonction dérivable de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]0\,;1[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par l'origine.

Exercice 33 – Théorème de Rolle généralisé. (★★) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $[a\,;+\infty[$, dérivable sur $]a\,;+\infty[$, et tendant vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

On procèdera de deux façons différentes. D'abord en appliquant le théorème de Rolle à la fonction f sur un segment bien choisi, puis en appliquant le théorème de Rolle sur $\left[\operatorname{Arctan}(a)\,;\frac{\pi}{2}\right]$ à la fonction $f \circ \tan$ prolongée par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 34 – Théorème des accroissements finis généralisés et règle de L'Hôpital. (★★)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et dérivables sur $]a\,;b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a\,;b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in\,]a\,;b]$.
2) Montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

   On appliquera le théorème de Rolle à la fonction $x \longmapsto f(x) - \alpha g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.
3) Règle de L'Hôpital : on suppose que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ à droite en a. Montrer que
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$
4) Application : montrer que $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$ puis $\dfrac{x-\sin(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{6}$.

Exercice 35. (★) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 36. (★) Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(a) > 0$ et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) < 0$.

Exercice 37. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $c \in\,]a_1\,;a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : montrer que, si P est une application polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au plus $n+1$ solutions.

Exercice 38 – Un résultat bien utile. (★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $c \in\,]a\,;a+\eta]$, $f(c) > f(a)$ (on s'intéressera au taux d'accroissement). En particulier, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c) > f(a)$. Attention, cela ne veut pas dire que f est strictement croissante sur un voisinage de a ! On a en effet vu un contre-exemple dans le cours.
2) Donner un résultat analogue si $f'(a) < 0$, si $f'(b) > 0$ ou si $f'(b) < 0$.

Exercice 39. (★) Soient f et $g : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$ et $f'(b) > g'(b)$. En utilisant l'exercice 38, montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 40. (★) Soit $f\,[0\,;1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$. En utilisant l'exercice 38, montrer qu'il existe $c \in\,]0\,;1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 41 – Théorème de Darboux. (★★★) Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1) On suppose dans cette question que $f'(a) < 0 < f'(b)$
   a) Montrer que si f est $\mathscr{C}^1$, alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   b) On suppose à présent uniquement que f est dérivable. Montrer que le résultat de la question précédente est encore vérifié.
2) On ne suppose plus que $f'(a) < 0 < f'(b)$. En utilisant l'exercice 38, montrer que pour tout $m \in [f'(a)\,;f'(b)]$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f'(c) = m$. En d'autres termes, une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue !
3) Montrer que la partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 42. (★★) Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ continue vérifiant $f \circ f = f$. Dans l'exercice 33 du TD n° 18, nous avons montré que l'ensemble des points fixes de f est un segment non vide. Montrer que, si f est de plus dérivable sur $[0\,;1]$, alors f est constante ou est la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0\,;1]$.

Exercice 43. (★★★) Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'' s'annule sur $\mathbb{R}$.

VI Suites récurrentes : le retour

Exercice 44. (★★) Notons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{2}{3}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.

1) Montrer que $x_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) Montrer qu'il existe $M \in \,]0\,;1[$ telle que g est M-Lipschitzienne sur $]1\,;+\infty[$.
3) Montrer alors que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$.
4) Supposons que $x_0 = 1$. Déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que x_{n_0} est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près.

Exercice 45. (★★) Notons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in I = \,]3\,;4[$.
3) Montrer que $f(I) \subset I$ et que f' est bornée sur I par $\dfrac{1}{12}$.
4) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $y_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$. Montrer que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 46. (★★) Notons $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(\mathrm{e}^x)$. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in \,]0\,;1[$.
3) Montrer que f est $\ln(2)$-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \mathrm{e}^{-x_n}\ln(1+\mathrm{e}^{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 47 – Points fixes attractifs et répulsifs. (★★) Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1) Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| < 1$.
   a) Justifier l'existence d'un réel $K \in [0\,;1[$ et d'un voisinage V de c tel que f soit K-lipschitzienne sur $I \cap V$.
   b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.
2) Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| > 1$.
   a) Justifier l'existence d'un réel $K > 1$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \geqslant K$ sur $I \cap V$.
   b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V \backslash \{c\}$. Montrer qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $u_n \notin V$. En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par sortir, par « être expulsée » du voisinage.