

Dénombrement

I Dénombrements en vrac

Exercice 1. (★) À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Exercice 2. (★) Combien y a-t-il de mots utilisant l'alphabet latin (ayant un sens ou non) composés

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) de cinq lettres? | 4) de cinq lettres formant un palindrome? |
| 2) de cinq lettres distinctes? | 5) de cinq lettres distinctes et dans l'ordre alphabétique? |
| 3) de cinq lettres avec un y ? | 6) de cinq lettres avec exactement 2 voyelles? |

Exercice 3. (★) On dispose d'une urne avec 4 boules bleues, 6 boules rouges et 7 boules jaunes. On suppose que les boules sont numérotées (de telle sorte que l'on puisse les distinguer). On tire 5 boules dans l'urne.

- 1) Quel est le nombre de tirages simultanés donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune?
- 2) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune dans cet ordre?
- 3) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune?
- 4) (★★) Reprendre ces trois questions dans le cas où les boules sont indiscernables et ajouter le cas où les tirages se font avec remise.

Exercice 4. (★ à ★★) Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur (\clubsuit , \spadesuit , \diamondsuit ou \heartsuit) et un rang (un numéro ou une figure). On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de 52 cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de 32 cartes¹). On obtient ce qu'on appelle une main.

- 1) Combien y a-t-il de mains possibles?
- 2) Combien y a-t-il de mains avec

a) uniquement des figures?	d) deux piques, un cœur et deux carreaux?
b) exactement un trèfle?	e) au moins une dame et un 9?
c) au moins un valet?	f) exactement deux rois ou exactement deux cœurs?
- 3) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :
 - a) une *quinte flush* (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs)?
On introduira s_r le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s_{13} = 10$ et $s_8 = 4$.
 - b) un *carré* (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque)?
 - c) un *full* (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang)?
 - d) une *couleur* (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs)?
 - e) une *quinte* (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur)?
 - f) un *brélan* (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes)?
 - g) une *double paire* (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents)?
 - h) une *paire* (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire)?
 - i) une *carte haute* (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs)?

Exercice 5. (★★) Une étagère comporte 15 DVD distincts dont 6 films de science fiction, 7 thrillers et 2 biopics. Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère? Qu'en est-il si on impose un rangement par genre? Et si on souhaite seulement que les thrillers soient groupés?

1. Pour obtenir un jeu de 32 cartes à partir d'un jeu de 52 cartes, on enlève toutes les cartes numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6.

Exercice 6. (★★) Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules 1 à 5 sont blanches et les boules 6 à 15 sont noires. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.

- 1) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages contenant deux boules blanches et trois boules noires ?

Exercice 7. (★) Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) de chacun de ses mots : MAISON, POSSIBLE, ANAGRAMME, LEDZEPPELIN, MISSISSIPPI ?

Exercice 8. (★★) Soient n et p dans \mathbb{N}^* . Dénombrer

- 1) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.
Indice : on pourra coder cette situation par une succession de 0 et de | comme en cours.
- 2) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune ne soit vide.
- 3) le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , sans prendre en compte l'ordre.
- 4) le nombre de n -uplets (r_1, \dots, r_n) d'éléments de $\llbracket 0; p \rrbracket$ tels que $r_1 + \dots + r_n = p$.
- 5) (★★★) le nombre d'applications croissantes de E dans F lorsque E et F sont des parties finies de \mathbb{R} ayant respectivement p et n éléments.

II Formule du crible

Exercice 9 – Formule de Poincaré pour trois ensembles. (★★)

- 1) Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E fini. Montrer que $A \cup B \cup C$ est fini et que

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

L'exercice suivant généralise cette formule à une union finie quelconque.

- 2) Quelques applications de cette formule.
 - a) Dans un ciné-club, 45 membres ont vu au moins un des trois films de Hitchcock *Vertigo*, *Psycho* et *Rear Window*. On sait que 33 d'entre eux ont vu *Vertigo*, 30 ont vu *Psycho* et 19 ont vu *Rear Window*. On sait aussi que 22 ont vu à la fois *Vertigo* et *Psycho*, 13 ont vu à la fois *Psycho* et *Rear Window*, 8 ont vu à la fois *Vertigo* et *Rear Window*. Combien de membres ont vu les trois films ?
 - b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 2026 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?

Exercice 10 – Formule du crible. (★★★) Montrer que si E_1, \dots, E_n sont des ensembles finis, alors :

$$\text{card} \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}).$$

Exercice 11 – Nombre de dérangements. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n . On appelle dérangement de E toute permutation (c'est-à-dire toute bijection de E sur lui-même) sans point fixe. Notons D_n le nombre de dérangements de E . Montrer que

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

en utilisant la formule du crible (cf. exercice précédent). Calculer ensuite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D_n}{n!}$ et interpréter¹.

1. On pourra faire le lien avec le jeu du « Noël Canadien »

III Dénombrements plus abstraits

Exercice 12. (★★) Soit E un ensemble à n éléments.

- 1) Dénombrer les lois de composition internes sur E .
- 2) Dénombrer les lois de composition internes commutatives sur E .
- 3) Dénombrer les lois de composition internes commutatives sur E admettant un élément neutre.

Exercice 13. (★★) Soit E un ensemble à n éléments. Montrer que $\sum_{X \subset E} \text{card}(X) = n2^{n-1}$.

Exercice 14. (★★★) Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E dont l'intersection soit un singleton ?

Exercice 15. (★★) Soit E un ensemble à n éléments.

- 1) Combien y a-t-il de partitions de E en deux ensembles (non vides) ?
- 2) Même question avec trois ensembles (non vides).

Exercice 16. (★★) Soit G un groupe fini et soient A et B deux parties de G . Notons $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. On suppose que $\text{card}(A) + \text{card}(B) > \text{card}(G)$.

- 1) Montrer que, pour tout $g \in G$, $A \cap \{gb^{-1} \mid b \in B\}$ est non vide.
- 2) Montrer que $G = AB$.

Exercice 17. (★★★) Soient G un groupe fini, H un groupe (pas forcément fini) et $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes. Montrer que $\text{card}(G) = \text{card}(\text{Ker}(f)) \times \text{card}(\text{Im}(f))$.

IV Dénombrement via relation de récurrence

Exercice 18 – Nombres de Bell. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n (l'ordre des ensembles formant la partition n'ayant pas d'importance) avec la convention que $B_0 = 1$.

- 1) Calculer B_1 , B_2 et B_3 .
- 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

On pourra, dans un ensemble E de cardinal $n+1$, se donner un élément a de E et séparer les cas, selon le cardinal de la partie de E dans la partition qui contient a .

Exercice 19 – Nombre de parenthésages admissibles. (★★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n la nombre de façons d'écrire n parenthèses gauches et n parenthèses droites de sorte que le mot obtenu soit bien parenthésé (on parle de parenthésage admissible). On prend la convention selon laquelle, lorsqu'il n'y a pas de parenthèse, il n'y a qu'une façon de les ordonner, en ne faisant rien : $C_0 = 1$. Par exemple, lorsque $n = 3$, les 5 possibilités sont

$$((())), \quad ()(), \quad (())(), \quad ()(()) \quad \text{et} \quad ()()().$$

Les nombres C_n , $n \in \mathbb{N}$, sont appelés les nombres de Catalan.

- 1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construire une bijection entre les parenthésages admissibles avec $2n$ parenthèses et les chemins de Bernoulli allant de $(0, 0)$ à $(2n, 0)$ sans descendre sous l'axe des abscisses (cf. paragraphe III.3.c du cours).

Compte tenu du paragraphe III.3.c du cours, on a donc $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Exercice 20 – Nombre de surjections. (★★★) Pour tous entiers naturels n et p non nuls, notons $S(n, p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $S(n, p)$ lorsque $p > n$
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S(n, n)$, $S(n, 1)$, $S(n, 2)$, $S(n + 1, n)$.
- 3) Montrer que pour tous $n \geq 3$ et $p \in \llbracket 2; n - 1 \rrbracket$,

$$S(n, p) = p \times (S(n - 1, p - 1) + S(n - 1, p)).$$

- 4) En déduire que, $S(n + 2, n) = \frac{n(3n + 1)(n + 2)!}{24}$.

V Double comptage

Exercice 21. (★★) Montrer par double comptage que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 22 – Nombre de dérangements – remake. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'exercice 11, on a défini la notion de dérangement d'une permutation d'un ensemble E à n éléments et noté D_n le nombre de dérangement. On convient que $D_0 = 1$. En utilisant un double comptage puis la formule¹ d'inversion de Pascal (vue dans l'exercice 41 du chapitre n° 7), retrouver le fait que

$$D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!.$$

Exercice 23 – Nombre de surjections – remake. (★★) Pour tous entiers naturels n et p non nuls, notons $S(n, p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments. On a déjà obtenu une formule de récurrence dans l'exercice 20. En utilisant un double comptage puis la formule¹ d'inversion de Pascal (vue dans l'exercice 41 du chapitre n° 7), retrouver le fait que, pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

1. **Formule d'inversion de Pascal.** Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j.$$