

Décomposition en éléments simples

Exercice 1. (★) Effectuer la division euclidienne de :

1) $A : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B : x \mapsto 2x^2 + x - 1$.

2) $A : x \mapsto x^6 + x^5 + 4x^2 - 3x - 9$ par $B : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Exercice 2. (★) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \frac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3}$.

2) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

3) $f : x \mapsto \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$.

4) $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3 x(x-1)}$.

Exercice 3. (★) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z^2}{(z-i)^2(z+2i)(z-1)}$$

Exercice 4. (★★) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} puis sur \mathbb{R} la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^7}{(x^2+2x+2)^2}$$

Exercice 5. (★) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$. Décomposer en éléments simples la fonction

$$f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)}$$

Exercice 6. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

1) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$.

2) $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$,

3) $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$,

Exercice 7. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$