

# Décomposition en éléments simples

**Exercice 1. (★)** Effectuer la division euclidienne de :

1)  $A : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  par  $B : x \mapsto 2x^2 + x - 1$ .

2)  $A : x \mapsto x^6 + x^5 + 4x^2 - 3x - 9$  par  $B : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x + 1$ .

**Exercice 2. (★)** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  les fonctions suivantes :

1)  $f : x \mapsto \frac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3}$ .

2)  $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$ .

3)  $f : x \mapsto \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$ .

4)  $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^3 x(x-1)}$ .

**Exercice 3. (★)** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  la fonction

$$f : z \mapsto \frac{z^2}{(z-i)^2(z+2i)(z-1)}$$

**Exercice 4. (★★)** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  puis sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^7}{(x^2+2x+2)^2}$$

**Exercice 5. (★)** Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ . Décomposer en éléments simples la fonction

$$f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

**Exercice 6. (★)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer les sommes :

1)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$ .

2)  $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}$ ,

3)  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$ ,

**Exercice 7. (★)** Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ , montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$