Feuille d'exercices n° 6

Nombres complexes

I Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. (★) Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x + \mathrm{i}y$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}, \quad \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-3}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}, \quad (-\mathrm{i})^{2020}, \quad 2\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \quad \frac{(\mathrm{i}-2)^3+2\mathrm{i}\sqrt{5}+9}{(1-\mathrm{i}\sqrt{2})^2+3}, \quad \frac{\mathrm{j}^{12}}{1+\mathrm{j}}, \quad \mathrm{j}+2\mathrm{j}^2+3\mathrm{j}^3, \quad (2-\mathrm{j})(3+2\mathrm{j})$$

Exercice 2. (★) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 3. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ des complexes non nuls de même module. Montrer que

$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 – Formule du parallélogramme. (★) Montrer que, pour tous complexes z et z',

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi l'appelle-t-on formule du parallélogramme ?

Exercice 5. (★) Soient z et z' deux complexes. Montrer que

1) $1 \leqslant |z+z'| + |1+z| + |z'|$,

2) $|z+z'|^2 \leqslant \left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$.

Exercice 6. (★★) On dit qu'un entier n est somme de deux carrés d'entiers si il existe x et y dans $\mathbb{N}$ tels que $n = x^2 + y^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 7. (★) Soient $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|u| = 1$.

Exercice 8. (★) Soit $(s,t,u) \in \mathbb{U}^3$. Montrer que $|st+tu+us| = |s+t+u|$.

Exercice 9. (★★) Soit $(z,z') \in \mathbb{U}^2$ tel que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

II Forme trigonométrie, écriture exponentielle, racines de l'unité

Exercice 10. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}, \quad -2\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}, \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1, \quad \left(\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}\right)^n, \quad \left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n, \quad \frac{1}{(\sqrt{3}+3\mathrm{i})^4}, \quad (1-\mathrm{i})^n - (1+\mathrm{i})^n$$

Exercice 11. (★) Écrire $z = \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 12. (★) Déterminer les entiers n tels que $(\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2})^n$ soit réel.

Exercice 13. (★) Donner un complexe de module 1 qui ne soit pas une racine de l'unité.

Exercice 14. (★) Soient $x \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$. Donner un argument de $z = x\left(\dfrac{1-\mathrm{i}\tan(\alpha)}{1+\mathrm{i}\tan(\alpha)}\right)$.

Exercice 15. (★★) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est égal à

$$2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\right).$$

Exercice 16. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, linéariser les expressions $\sin^3(x)\cos^2(x)$ et $\cos(2x)\sin^2(3x)$.

Exercice 17. (★★) Simplifier

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 18. (★★) Soit $[0\,;2\pi]$. Donner le module et un argument de $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.
On pourra utiliser le fait que, pour tout $a \in \mathbb{C}$, $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$.

Exercice 19. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1\right| \leqslant |x|$.
Est-ce encore vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$?

Exercice 20. (★) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z| \leqslant \mathrm{e}^{|z|}$ et étudier les cas d'égalité.

III Résolution d'équations

Exercice 21. (★) Déterminer les racines carrées des complexes suivants : i, $1-\mathrm{i}$, $5+4\mathrm{i}$ et $5\sqrt{3}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Exercice 22 – Équations polynomiales de degré 2. (★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $2z^2-5z+6=0$,
2) $z^2-2z\cos(\theta)+1=0$ où $\theta \in \mathbb{R}$,
3) $z^2+5\mathrm{i}z+4=0$,
4) $\mathrm{i}z^2+(4\mathrm{i}-3)z+\mathrm{i}-5=0$,
5) $(z-\mathrm{i})^2=-(z+1-\mathrm{i})^2$,
6) $|z|^2+3|z|-4=0$.

Exercice 23. (★) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Trouver deux **réels** p et q tels que $z^2+pz+q=0$.

Exercice 24. (★) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^2-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+1=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 25. (★★) Résoudre les systèmes d'équations suivants, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{C}^2$:

1) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 3 \end{array}\right.$
2) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ xy & = & \mathrm{i} \end{array}\right.$
3) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ xy & = & 3-\mathrm{i} \end{array}\right.$

Exercice 26 – Équations polynomiales de degré supérieur à 3. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^3=\dfrac{\mathrm{i}+\sqrt{3}}{\mathrm{i}-\sqrt{3}}$,
2) $z^3+3z-2\mathrm{i}=0$,
3) $z^6+z^3+1=0$,
4) $z^3-\mathrm{i}=6(z+\mathrm{i})$,
5) $z^4=-7-24\mathrm{i}$,
6) $z^3+(2-4\mathrm{i})z^2-(2+4\mathrm{i})z+16+8\mathrm{i}=0$.

Indication : l'équation de la question 6 admet une racine imaginaire pure.

Exercice 27. ($\star\star$) Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 1 \\ abc & = & 1 \end{array}\right.$, d'inconnues a, b et c dans $\mathbb{U}$.
On pourra s'intéresser à la fonction $f : z \longmapsto (z-a)(z-b)(z-c)$.

Exercice 28 – Équations avec conjugaison. ($\star\star$) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^4 = z + \overline{z}$,
2) $\overline{z^7} = \dfrac{1}{z^3}$,
3) $\overline{z} = z^n$,
4) $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

Exercice 29 – Équations avec exponentielle complexe. ($\star\star$) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $\mathrm{e}^z = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$,
2) $\mathrm{e}^z = -1 + 2\mathrm{i}$,
3) $\mathrm{e}^z = -12 - 5\mathrm{i}$,
4) $\mathrm{e}^z(1-\mathrm{e}^z) = 1$,
5) $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2\mathrm{i}$,
6) $(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{2z} = \mathrm{e}^z + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-z}$.

IV Interprétation géométrique des complexes

Exercice 30. ($\star$) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est réel si et seulement si $\left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| = 1$. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 31. ($\star$) Caractériser géométriquement les similitudes suivantes :

1) $z \longmapsto 4\mathrm{i}z + 1$,
2) $z \longmapsto 3(1-\mathrm{i})z + 8 + \mathrm{i}$,
3) $z \longmapsto (2-\mathrm{i})z + \mathrm{i}$.

Exercice 32. ($\star$)

1) Donner une expression de la rotation r de centre $\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
2) On note h l'homothétie de centre $2-\mathrm{i}$ et de rapport $-\frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $r \circ h$.
3) On note c la symétrie centrale de centre $1+\mathrm{i}$. Déterminer une expression de $r \circ c$.
4) On note s la symétrie d'axe des abscisses. Déterminer une expression de $r \circ s$.

Exercice 33. ($\star$)

1) Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.
2) Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une rotation, soit une translation.

Exercice 34. ($\star\star$) Soient A, B et C trois points du plan d'affixes a, b et c. On dit que ABC est un triangle équilatéral direct (respectivement indirect) si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (respectivement $-\frac{\pi}{3}$).

1) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$. Les complexes a, b, c jouent-ils le même rôle ?
2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral (direct ou indirect) si et seulement si $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$.

Exercice 35. Représenter graphiquement les ensembles suivants dans le plan complexe :

$A = \{z \in \mathbb{C}\,|, \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z) > 0\}$,
$B = \{z \in \mathbb{C}\,|, 1 \leqslant |z-3| < 3\}$,
$C = \{\mathrm{i} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,|\, r > 0\}$,
$D = \{\mathrm{i} + r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,|\, 2 < r < 4\}$,
$E = \{\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$,
$F = \{\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|\, -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}\}$,
$G = \{x\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\,|\, -2 \leqslant x < 1\}$,
$H = \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,|\, 0 < r \leqslant 2,\ 3\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\}$,
$I = \{z \in \mathbb{C}\,|\, z^4 \in \mathbb{R}\ \ |z|^4 \geqslant 2\}$,
$J = \{z \in \mathbb{C}\,|\, \mathrm{Re}\left(z^3\right) = \mathrm{Im}\left(z^3\right)\}$.

Exercice 36. (★) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

1) les points d'affixes j, z et $\mathrm{j}z$ soient alignés.
2) les points d'affixes i, z et $\mathrm{i}z$ forment un triangle isocèle rectangle en i.
3) les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral (non réduit à un point)

Exercice 37 – Parallélogrammes. (★★) Soient A, B, C et D trois points du plan non alignés trois à trois.

1) En utilisant des complexes, justifier que les assertions suivantes sont équivalentes :
   ① les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux,
   ② les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux,
   ③ $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu,

   On suppose dans la suite que c'est le cas. On dit que $ABCD$ est un parallélogramme.
2) Montrer que (AB) et (BC) sont orthogonales (il s'agit alors d'un rectangle) si et seulement si les longueurs AC et BD sont égales.
3) Montrer que les longueurs AB et BC sont égales (il s'agit alors d'un losange) si et seulement si (AC) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 38. (★★) Trouver les complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme. Montrer qu'il s'agit alors d'un losange.