Feuille d'exercices n° 35

Codage matriciel

I Représentation matricielle

Exercice 1. (★) Donner la matrice relativement aux bases canoniques, pour les applications linéaires suivantes :

1) $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (2x - 3y + t, 9x - 4z) \in \mathbb{R}^2$.
2) $g : (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \longmapsto (x + 3z - t + 6u, x + 5y + t, -3x + y + 2z - 4u) \in \mathbb{R}^3$.
3) $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (y - x, x, x - y, y, 0, x + y) \in \mathbb{R}^6$.
4) $u : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto M^\top$.
5) $\varphi : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \in \mathbb{R}^3$.
6) $\psi : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^3P' \in \mathbb{R}_4[X]$.
7) $\eta : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2. (★)

1) Montrer que $\mathscr{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$ est un endomorphisme.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3. (★) Soit $\psi : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P(1)\big) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice de ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
3) En déduire ψ^{-1}.

Exercice 4. (★) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque. Donner la matrice de $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM + MA$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5. (★) Notons F l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1) Donner une base $\mathscr{B}$ de F.
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de F.
3) Donner $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de F.

Exercice 6. (★) Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Notons $f : z \in \mathbb{C} \longmapsto z + a\overline{z}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$, lorsque $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminer sa matrice dans la base $(1, \mathrm{i})$.
2) Déterminer les noyau et image de f.
3) Que dire si on regarde $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 7. (★) Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En étudiant l'endomorphisme $f : P \in \mathbb{R}_4[X] \longmapsto P(X + 1)$, montrer que A est inversible et expliciter A^{-1} (sans faire de pivot de Gauss).

Exercice 8. ($\bigstar$) Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaître l'application linéaire u vérifiant :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. ($\bigstar$) Considérons A la matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en ligne et colonne n qui valent 1. Calculer A^2 en utilisant un endomorphisme représenté par A.

Exercice 10. ($\bigstar\bigstar$) Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-4y-2z, 4x-7y-4z, -5x+10y+6z) \end{array} \right.$$

et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x-8y-4z, 8x-15y-8z, -10x+20y+11z) \end{array} \right.$$

Montrer que f (respectivement g) est un projecteur (respectivement une symétrie) et donner une base dans laquelle la matrice de f (respectivement g) est diagonale.

Exercice 11. ($\bigstar\bigstar$) Soient $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Notons $E = \mathbb{K}_n[X]$ et posons $u : P \in E \longmapsto P(X+\alpha)$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer A, la matrice canoniquement associée à u.
2) Montrer que A est inversible de deux façons différentes et déterminer A^{-1} sans calcul d'inverse.
3) Montrer que pour tous $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tels que $i < j$,

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0$$

Exercice 12. ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $E = \{x \mapsto P(x)\mathrm{e}^x \,|\, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, notons $b_k : x \longmapsto x^k \mathrm{e}^x$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel dont $\mathscr{B} = (b_0, \dots, b_n)$ est une base. Quelle est la dimension de E ?
2) Montrer que $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de E, et donner sa matrice relativement à la base $\mathscr{B}$. Est-ce que D est un isomorphisme ?
3) Déterminer une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de D est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4) Déterminer M^{-1}.
5) En déduire une primitive de la fonction b_n.
6) En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 13. ($\bigstar$) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est inversible. Montrer que A et B sont inversibles.

II Rang, image et noyau

Exercice 14. (★) Donner le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\-1&-3&1&3\\-1&-2&2&3\\1&2&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&-2&4\\-1&1&-5\\4&1&5\\4&4&-4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-2&0&-2&-2&-2\\-1&0&-1&-1&-1\\4&-2&2&-2&1\end{pmatrix}$$

Exercice 15. (★) Donner sans calculs le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&4\\0&4&-2&0\\0&-6&3&0\\-1&0&0&-2\end{pmatrix},\qquad J_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix},\qquad B_n=\begin{pmatrix}0&1&4&\cdots&n^2\\1&0&0&\cdots&0\\4&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n^2&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Exercice 16. (★) Calculer le rang des applications linéaires de l'exercice 1.

Exercice 17. (★) Donner le rang des familles suivantes.

1) $((0,1,2,-1),(1,2,2,-1),(0,2,-1,1),(4,6,1,3))$
2) $((0,1,0,1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1))$
3) $((1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,1),(1,0,2))$
4) $((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$

Exercice 18. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Déterminer le rang la matrice

$$A_n=\begin{pmatrix}1&n+1&2n+1&\cdots&(n-1)n+1\\2&n+2&2n+2&\cdots&(n-1)n+2\\&&&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\&&&&\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\&&&&\\n&2n&3n&\cdots&n^2\end{pmatrix}.$$

Exercice 19. (★) Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$. Donner le rang de

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&a&b\\c&c&d&d\\ac&ac&ad&bd\end{pmatrix}$$

Exercice 20 – Une diagonalisation. (★) Notons

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

1) Donner selon la valeur de $\lambda\in\mathbb{R}$ le rang de $A-\lambda I_3$.
2) Donner une base de $\operatorname{Ker}(A-\lambda \mathrm{I}_3)$ pour chaque λ tel que $\operatorname{rg}(A-\lambda\mathrm{I}_3)<3$.
3) Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A=P^{-1}DP$. En déduire A^n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 21. (★★) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rang de la matrice $A_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\cos((i+j-2)\alpha)$.

Exercice 22. (★) Donner une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. (★) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Donner $\operatorname{Ker}(A)$ et $\operatorname{Im}(A)$.
2) En déduire le noyau et l'image de $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A.

Exercice 24. (★) Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base du noyau et de l'image des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices A et B respectivement.

Exercice 25. (★) Soit E un espace de dimension 4 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par $f(e_1) = 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_4$, $f(e_3) = e_2 - e_1 + e_4$ et $f(e_4) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4$.

1) Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
2) Quel est le rang de f ? Donner une base de $\operatorname{Im}(f)$ et de $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 26. (★) Notons $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto P(X+1) - P(X)$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Déterminer son rang. Donner une base de $\operatorname{Im}(f)$ et de $\operatorname{Ker}(f)$.
3) Calculer $f(5X^3 + 3X + 4)$ à l'aide d'opérations matricielles.

Exercice 27. (★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On introduit

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto X(1-X)P' + nXP.$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Expliciter la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) En déduire le rang de φ puis la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
4) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Exercice 28. (★★) Montrer qu'une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un diviseur de zéro si et seulement si elle n'est pas inversible.
On pourra considérer un endomorphisme u représenté par A et construire un endomorphisme v que l'on caractérisera sur $\operatorname{Im}(u)$ et un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u)$.

Exercice 29 – Matrices de rang 1. (★★)

1) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe X et Y deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = XY^\top$.
2) Soit $A = XY^\top$ de rang 1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$. Plus précisément, exprimer A^p à l'aide de A et de $\operatorname{tr} A$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $(I_n + A)^k$.

III Changement de base

Exercice 30. ($\bigstar$) Soit E un espace vectoriel admettant une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On pose

$$e_1' = e_1 + e_2, \qquad e_2' = 2e_1 + 3e_3 \qquad \text{et} \qquad e_3' = 3e_1 - e_2 + 4e_3.$$

1) Justifier que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.
2) Soit x tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.
3) Soit y tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^\top$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(y)$.

Exercice 31. ($\bigstar$) Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1 = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$ à la base $\mathscr{B}_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$.

Exercice 32. ($\bigstar$) Dans chacun des cas suivants, on donner la matrice A canoniquement associée à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Donner à chaque fois la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}_1$ (base de départ) et $\mathscr{B}_2$ (base d'arrivée).

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 = ((1,1),(1,2))$.
2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_1 = ((1,1),(2,-3))$, $\mathscr{B}_2 = ((1,1),(-1,-2))$.
3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 = ((1,0,1),(1,2,0),(0,1,1))$.

Exercice 33. ($\bigstar$) Notons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, y-z, -z+2x) \end{array} \right.$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que la famille $f_1 = e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 34. ($\bigstar$) On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1) Montrer que la famille $\mathscr{B}' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
3) Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
4) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $D : P \longmapsto P'$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base $\mathscr{B}$ puis dans la base $\mathscr{B}'$.

IV Matrices équivalentes

Exercice 35. ($\bigstar$)

1) Que dire d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = I_n$ pour une certaine base $\mathscr{B}$?
2) Que dire d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u) = I_n$ pour deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E ?

Exercice 36. ($\bigstar\bigstar$) Trouver P et Q inversibles telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

.

Exercice 37. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang r. Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.

Exercice 38. (★★) Soient $(A, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $ABC = 0_n$. Montrer que A ou C est la matrice nulle.

Exercice 39. (★★) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit de rang n.

Exercice 40. (★★) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe B inversible telle que $(AB)^2 = AB$.

V Matrices semblables

Exercice 41. (★) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 42. (★) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 43. (★) Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 44. (★★★) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ non nulle et nilpotente.

1) Justifier que l'indice de nilpotence de A est égal à 2 ou 3.
2) Montrer alors que A est semblable à l'une des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Est-ce que ces deux matrices sont semblables ?

Exercice 45. (★) Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer la trace de l'endomorphisme $u : P \longmapsto P(aX + b)$ de $\mathbb{K}_n[X]$.