Feuille d'exercices n° 10

Calcul intégral

I Calculs « directs » de primitives et d'intégrales

Dans ce paragraphe, tout doit être calculé sans avoir recours ni à un changement de variable, ni à une intégration par parties.

Exercice 1. (★) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

1) $x \longmapsto \dfrac{2x^4}{3} - \dfrac{x}{5} + 1$,
2) $x \longmapsto \dfrac{1}{(7x-1)^{2025}}$,
3) $x \longmapsto x^2 e^{-4x^3}$,
4) $x \longmapsto \dfrac{ax}{c+dx}$ avec $(a,c,d) \in (\mathbb{R}^*)^3$,
5) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{\sqrt[17]{5+2x+x^2}}$,
6) $x \longmapsto \exp(x+e^x)$,
7) $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^{2025}}$,
8) $x \longmapsto 2^x$,
9) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$,
10) $x \longmapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$,
11) $x \longmapsto \sqrt{x^2+x^4}$,
12) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$,
13) $x \longmapsto 1 - \sin(3-2x)$,
14) $x \longmapsto \cos^5(x)\sin(x)$,
15) $x \longmapsto \tan^2(x)$,
16) $x \longmapsto \tan(x) + \tan^3(x)$,
17) $x \longmapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,
18) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\sqrt{\mathrm{ch}(x)}}$,
19) $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$,
20) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$,
21) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}$,
22) $x \longmapsto x e^{ix^2}$,
23) $x \longmapsto \sin(3x)e^{-2x}$,
24) (★★) $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\sin(x)$,
25) (★★) $x \longmapsto |x|$.

Exercice 2. (★) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{e}^{2e} \ln(a)\,\mathrm{d}a$,
2) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3}{1-4v}\,\mathrm{d}v$,
3) $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (3e^{-\frac{x}{4}}+1)^2\,\mathrm{d}x$,
4) $\displaystyle\int_{1}^{2} e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right)\mathrm{d}u$,
5) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)}\,\mathrm{d}z$,
6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \big(\cos^5(y)+4\cos^3(y)-7\big)\sin(y)\,\mathrm{d}y$,
7) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$.
8) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{t}{\sqrt{9-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. (★) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $t \longmapsto \cos(\alpha t)\cos(\beta t)$,
2) $t \longmapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t)$,
3) $t \longmapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t)$.

Exercice 4. (★) Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $\sin^3$,
2) $\cos^4$,
3) $\sin^5$,
4) $\cos^6$,
5) $\cos^3\sin^2$,
6) $\sin^4\cos^2$.

Exercice 5. (★) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \frac{|x-1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x$,
2) $\displaystyle\int_{0}^{n} \sum_{k=0}^{n} |x-k|\,\mathrm{d}x$,
3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|u|}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 6. (★) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx$.

Exercice 7. (★★) Déterminer des primitives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant les réciproques de Argsh et Argch (cf. exercice 28 du TD n° 4).

II Intégrales et primitives de fonctions rationnelles

Exercice 8. (★) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

1) $x \longmapsto \dfrac{4}{4+x^2}$,
2) $x \longmapsto \dfrac{3}{7+2x^2}$,
3) $x \longmapsto \dfrac{5x}{1+2x^4}$,
4) $x \longmapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$,
5) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2x+5}$,
6) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$,
7) $x \longmapsto \dfrac{6x}{x^4+4x^2+13}$
8) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$,
9) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$,
10) $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$,
11) $x \longmapsto \dfrac{9}{x(x^2-9)}$,
12) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3+1}$,

Exercice 9. (★) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+3}\,dt$,
2) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dt}{t^2-1}$,
3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dt}{5+3t^2}$,
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,dt$,
5) $\displaystyle\int_3^5 \frac{8}{t(t^2-4)}\,dt$,
6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,dt$,
7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,dt$,
8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{9t^2+6t+5}$.

Exercice 10. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sur des intervalles à préciser) :

1) (★★) $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$,
2) (★★) $x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2}$,
3) (★★★) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$,
4) (★★★) $x \longmapsto \dfrac{4}{(x+1)(x^2+4x+5)^2}$.

III Calculs avec intégration par parties

Exercice 11. (★ à ★★) A l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

1) Arctan,
2) Arcsin,
3) Arccos,
4) $x \longmapsto \cos(\ln(x))$,
5) $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\sin(x)$,
6) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
7) $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
8) $x \longmapsto \dfrac{x^5}{\sqrt[4]{1+x^3}}$,
9) $x \longmapsto x^2 e^x \sin(x)$,
10) $x \longmapsto x\ (\mathrm{Arctan}(x))^2$,
11) $x \longmapsto \dfrac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 12. (★ à ★★) A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(3x)\,dx$,
2) $\displaystyle\int_0^1 a^3 e^{-\frac{a^2}{2}}\,da$,
3) $\displaystyle\int_1^e \ln^2(w)\,dw$,
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt$,
5) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}(t))^2\,dt$,
6) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$.

IV Calculs avec changement de variable

Exercice 13. (★ à ★★) Avec un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

1) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ (avec $u = \mathrm{e}^{\sqrt{t}}$)

2) $x \longmapsto \dfrac{5x^2}{\sqrt{2-3x}}$,

3) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x}$ (avec $u = \sqrt{1+t^3}$),

4) $x \longmapsto \tan^4(x)$ (avec $u = \tan(t)$),

Exercice 14. (★★) Déterminer des primitives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ en utilisant les changements de variable $u = \sqrt{t^2+1}+t$ et $u = \sqrt{t^2-1}+t$ respectivement.

Exercice 15. (★ à ★★) Avec un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (avec $t = 1+x^2$),

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x)\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$,

3) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$,

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ (avec $x = \cos(2t)$),

5) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

6) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16. (★★ à ★★★) Donner une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser) :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\tan(x)}$.

2) $x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{3+\sin(x)}$.

3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}$.

4) $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$.

5) $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}$.

6) $x \longmapsto \dfrac{1}{3-2\sin(x)}$.

Exercice 17 – Propriété du roi. (★) Soient a et b deux réels. Soit f une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ et à valeurs complexes. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 18. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide de la propriété du roi (cf. exercice 17), calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n(t)}{\sin^n(t)+\cos^n(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 – Intégrale de Serret. (★★) A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$ et de la propriété du roi (cf. exercice 17), calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

V Fonctions et suites définies à l'aide d'intégrales

Exercice 20. (★) Dans cet exercice, on fait semblant de ne pas connaître la fonction $\ln$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction

$$L : x \longmapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Montrer que pour tous x et y strictement positifs, $L(xy) = L(x)+L(y)$.

Exercice 21. (★★) Soit $T > 0$. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22. (★★) Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3) Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23. (★★) Soit $a > 0$. Calculer l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

1) en dérivant la fonction qui à $a \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto I_a$ associe cette intégrale.
2) à l'aide du changement de variable $x = 1/t$.
3) en faisant des intégrations par parties successives.

Exercice 24. (★★) Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $I(p, q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q\,\mathrm{d}t$ en fonction de p et q.