Feuille d'exercices n° 13

Propriété de la borne supérieure

Dans le prochain chapitre, nous verrons la caractérisation séquentielle d'une borne supérieure. Celle-ci nous permettra de traiter des exemples explicites comme ceux de l'exercice 25 du TD n° 3. En attendant, concentrons-nous sur des exemples plus théoriques.

Exercice 1. (★) Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A); \sup(B)\}$.
3) Montrer que l'ensemble $A + B = \{a + b \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $A + \lambda A = \{a + \lambda \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5) Montrer que l'ensemble $-A = \{-a \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ admet une borne inférieure et que $\inf(-A) = \sup(A)$.
6) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\lambda A = \{\lambda a \,|\, a \in \mathbb{R}\}$ admet une borne supérieure et que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Exercice 2. (★) Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, si $\sup(A) > 0$, alors A contient un élément strictement positif.
2) Si $\sup(A) \geqslant 0$, est-ce que A contient un élément positif ?

Exercice 3. (★★) Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.

1) Montrer que A admet une borne supérieure, que B admet une borne inférieure et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2) Montrer que, si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 4. (★) Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, si $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ est majorée, alors l'ensemble $f(A)$ admet une borne supérieure. On la note alors $\sup\limits_A f$.
2) Soient f et g deux fonctions bornées sur A. Montrer que $f + g$ est bornée sur A et que

$$\sup_A (f + g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g.$$

Justifier qu'il n'y a pas égalité en général.

Exercice 5. (★★) Soit f une fonction croissante sur $[0\,;1]$ et à valeurs dans $[0\,;1]$.

1) Montrer que $A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) \geqslant x\}$ possède une borne supérieure a.
2) Montrer que $f(a)$ est un majorant de A. Que peut-on en déduire ?
3) Montrer que $f(a) \in A$ et conclure que $f(a) = a$. On dit que a est un point fixe de f.
4) Est-ce qu'une fonction décroissante admet forcément un point fixe ?

Exercice 6 – Diamètre d'une partie bornée. (★★) Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 7 – Distance à une partie. (★★★) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$d(x, A) = \inf \big\{|x - a| \,\big|\, a \in A\big\}.$$

On appelle cette quantité la distance de x à la partie A.

1) Montrer que cette distance est bien définie.
2) On suppose dans cette question que $A =]0\,;1[$. Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto d(x, A)$.
3) Même question lorsque $A =]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$.
4) Donner un exemple de partie A et de réel x tel que :
   - $d(x, A)$ ne soit pas atteinte.
   - $d(x, A)$ soit atteinte en exactement un point de A.
   - $d(x, A)$ soit atteinte en exactement deux points de A.

   Est-il possible que $d(x, A)$ soit atteinte en plus de deux points de A ?
5) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$.
6) On suppose que A est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in A$ tel que $d(x, A) = |x - y|$. Montrer que A est un intervalle fermé (mais pas forcément borné).

Exercice 8. (★★) Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles indexée par un ensemble non vide J.

1) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est un intervalle (éventuellement vide).
2) Montrer que si $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est non vide, alors $\displaystyle\bigcup_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

Exercice 9. (★) L'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Exercice 10. (★) Soit $\in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{q^{2n+1} \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. (★★) Soit $d \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{k}{d^n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 – Caractérisation des rationnels décimaux. (★★). On rappelle que l'ensemble des nombre décimaux est $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{k}{10^n} \,\middle|\, (k, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$. On se donne $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et on suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{D}$ si et seulement si les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2; 5\}$.

Exercice 13 – Endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$. (★★★) On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

On se donne dans la suite f une telle application.

1) Donner la valeur de $f(0)$. Montrer que $f(1) \in \{0; 1\}$. Que dire de f si $f(1) = 0$? On supposera dans la suite que $f(1) = 1$.
2) Montrer que f est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$.
3) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r$.
4) Montrer que f est croissante.
5) En déduire que f est l'identité sur $\mathbb{R}$.