

Arithmétique des entiers

I Divisibilité

Exercice 1. (★) Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 2. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux. Simplifier $(n + 1) \binom{2n + 1}{n + 1}$ et en déduire que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 3. (★) Soit n un entier naturel se terminant par 5. Notons p le nombre formé par les chiffres de n à l'exception du chiffre des unités. Montrer que n^2 est l'entier naturel terminant par 25 et dont les chiffres précédents sont $p(p + 1)$.

Exercice 4. (★) Pour quelles valeurs de $a \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ le nombre d'écriture décimale $123a4$ est-il divisible par 12 ?

Exercice 5. (★) Soit $n \geq 2$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors n est la puissance 6-ième d'un entier.

Exercice 6. (★) Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 7. (★★) Soient a et b deux entiers naturels.

- 1) Montrer que si a^2 divise b^2 alors a divise b .
- 2) Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré, alors a et b sont des carrés. Le résultat est-il encore vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?
- 3) Généraliser au cas d'une puissance $k^{\text{ième}}$ avec $k \geq 2$. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs non nuls n'est jamais une puissance $k^{\text{ième}}$.

Exercice 8. (★★) Pour tout $n \geq 1$, on note $D_+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n .

- 1) Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Montrer que la fonction « produit »

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_+(a) \times D_+(b) & \longrightarrow D_+(ab) \\ (x, y) & \longmapsto x \times y \end{array} \right.$$

est bijective.

- 2) Pour tout $n \geq 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n . Montrer que la fonction σ est semi-multiplicative, c'est-à-dire que pour tous a et b premiers entre eux, $\sigma(ab) = \sigma(a) \times \sigma(b)$.

Exercice 9. (★★) Notons $\theta = \frac{2\pi}{7}$. En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\theta)$ est irrationnel.

Exercice 10. (★★) Soit p premier et soit $k \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$. Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 11 – Unicité de l'écriture en base b . (★★) Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $r_0, \dots, r_k, s_0, \dots, s_\ell$ des entiers naturels strictement inférieurs à b tels que

$$\sum_{i=0}^k r_i b^i = \sum_{i=0}^{\ell} s_i b^i.$$

Montrer que $k = \ell$ et que, pour tout $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, $r_i = s_i$.

II Congruences

Exercice 12. (★) Quel est le chiffre des unités de 1789^{1789} ? de 1515^{1515} ? de 2022^{2022} ? de $2017^{2021^{2023}}$?

Exercice 13. (★) Donner les deux derniers chiffres de $S = \sum_{k=0}^{2023} k!$.

Exercice 14. (★) Montrer que 7 divise $3^{105} + 4^{105}$.

Exercice 15. (★) Montrer que, pour tout n impair, $n(n^2 - 1)$ est divisible par 24.

Exercice 16. (★) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Exercice 17. (★) Résoudre l'équation $3x \equiv 4[7]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18. (★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- 1) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
- 2) $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ est divisible par 17.
- 3) $2^{4n} + 5$ est divisible par 21.
- 4) $n^{2023}(n^{2024} - 1)$ est divisible par 8.

Exercice 19. (★) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^7 \equiv n[42]$.

Exercice 20. (★) Soient $n \geq 1$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b[n]$, alors $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 21. (★) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que si 7 divise $a^3 + b^3 + c^3$ alors 7 divise abc .

Exercice 22. (★) Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Exercice 23. (★) Montrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{21n-3}{4}$ et $\frac{15n-2}{4}$ soient entiers.

Exercice 24. (★★) Montrer que, parmi les 101 dalmatiens, on peut en choisir 11 tels que le nombre total de leurs taches est un multiple de 11.

Exercice 25. (★★) Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a^k \equiv 1[b]$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe un multiple de 2023 qui ne s'écrit qu'avec des 1. Et pour 2024 ? 2025 ?

Exercice 26. (★★) On se donne 2023 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances $37^{\text{ièmes}}$ est divisible par 399.

Exercice 27 – Nombres de Fermat. (★★★)

- 1) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, si $2^a + 1$ est premier, alors a est une puissance de 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$.

- 2) Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

On admet que $F_4 = 65537$ est un nombre premier.

- 3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

b) En déduire que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter les deux derniers chiffres de F_n selon la valeur de n .

- 5) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un facteur premier de F_n .

- a) Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^k \equiv 1[p]\}$ admet un plus petit élément noté d .
- b) Montrer que tout élément de E est divisible par d .
- c) En déduire que $d = 2^{n+1}$.

d) Montrer que $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$. Pourquoi était-il naturel pour Euler d'essayer 641 lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5 ?

e) Montrer que, en effet, $641 | F_5$.

A ce jour, on sait que, pour tout $n \in \llbracket 5; 32 \rrbracket$, F_n n'est pas premier. On sait que d'autres ne le sont pas non plus, comme F_{73} . Mais on ne sait pas s'il existe d'autres nombres premiers parmi les F_n , $n \geq 33$.

Exercice 28. (★★★) Donner la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444} .

III Équations diophantiennes

Exercice 29. (★) Résoudre l'équation $29x - 11y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 30. (★) En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation diophantienne $x^2 - 2y^2 = 3$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, n'a pas de solution.

Exercice 31. (★★) Résoudre l'équation $5x - 3y + 8z = 1$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.

Exercice 32. (★★) Montrer, en raisonnant modulo 3, que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, n'a pas de solution entière.

IV PPCM et PGCD

Exercice 33. (★) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 34. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le PGCD de $n! + 1$ et de $(n+1)! + 1$.

Exercice 35. (★) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $28 \vee n = 140$.

Exercice 36. (★) Donner $9100 \wedge 1848$.

Exercice 37. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $n^3 + 2n \wedge n^4 + 3n^2 + 1$.

Exercice 38. (★★) Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 39. (★)

1) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 4373 et 826 par n donnent pour restes 8 et 9.

2) Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 6381 et 3954 par n donnent pour restes 9 et 6.

Exercice 40. (★★) Soient M et m deux entiers naturels non nuls. Donner une CNS sur M et m pour qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$.

Exercice 41. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p supérieurs ou égaux à 2, $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_p = \mathbb{U}_{n \wedge p}$.

Exercice 42 – Éléments générateurs de \mathbb{U}_n . (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

1) Montrer que $\{\omega^p \mid p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ premier avec n tel que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

2) En déduire que $\{\omega^p \mid p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ premier avec n tel que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

V Valuation p -adique

Exercice 43. (★) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 5544. Et de 36000000000.

Exercice 44. (★★) Quel est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs ?

Exercice 45. (★) Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Exprimer la décomposition en produit de facteurs premiers du plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que b divise an ?

Exercice 46. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_2(5^{2^n} - 1) = n + 2$.

Exercice 47 – Formule de Legendre. (★★★) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $p \in \mathbb{P}$.

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\text{card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid v_p(i) = k\})$.
- 2) Montrer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Cette somme n'est pas infinie en fait puisque $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$ dès que k est tel que $p^k > n$.

- 3) Par combien de zéros l'entier $2024!$ s'achève-t-il ?

VI Nombres premiers

Exercice 48. (★) Les nombres 1, 11, 111, 1111 et 111111 sont-ils premiers ?

Exercice 49 – Nombres premiers jumeaux. (★★)

1) Soit $p \geq 5$ (pas forcément premier). Montrer que parmi p , $p + 2$ et $p + 4$, il y a au moins un multiple de 3. Il en découle que p , $p + 2$ et $p + 4$ ne peuvent pas être tous les trois premiers. Cependant, il n'y a aucune raison pour que p et $p + 2$ (ou $p + 2$ et $p + 4$) ne soient pas premiers tous les deux : deux nombres premiers p et q tels que $|p - q| = 2$ sont dits jumeaux. C'est le cas par exemple de 3 et 5, de 5 et 7, de 11 et 13, de 17 et 19 etc.

- 2) Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'ils sont jumeaux si et seulement si $pq + 1$ est un carré.
- 3) Montrer que, si p et q sont premiers jumeaux et supérieurs ou égaux à 5, alors $p + q$ est divisible par 12.

Exercice 50 – Produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n . (★★★)

- 1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.
- 2) Soit p un nombre premier vérifiant $m + 1 < p \leq 2m + 1$. Montrer que p divise $\binom{2m+1}{m}$. En déduire que

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$$

où le produit ne porte que sur les nombres premiers.

- 3) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$.

Exercice 51 – Théorème de Wilson. (★★★)

- 1) Soit $p \geq 2$ un nombre premier.
 - a) Montrer que pour tout $x \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$, il existe un unique élément de $\llbracket 1; p - 1 \rrbracket$ que l'on notera $f(x)$ tel que $x \times f(x) \equiv 1[p]$. Expliciter $f(f(x))$.
 - b) Soit $x \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket$. Donner le cardinal de $\{x; f(x)\}$.
 - c) Soit $(x, y) \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket^2$. Montrer que les ensembles $\{x; f(x)\}$ et $\{y; f(y)\}$ sont soit disjoints soit égaux.
 - d) Montrer finalement que $(p - 1)! \equiv 1[p]$.
- 2) Soit $n \geq 5$ composé. Montrer que $(n - 1)! \equiv 0[n]$.
- 3) Nous avons donc montré le théorème de Wilson : un entier $p \geq 5$ est premier si et seulement si $(p - 1)! \equiv -1[p]$. Ce critère de primalité présente-t-il un intérêt pratique ?
- 4) Si $n \geq 2$, on note $f(n)$ le plus petit nombre strictement positif congru à $2 + 2n!$ modulo $n + 1$. Montrer que $\{f(n) \mid n \geq 2\} = \mathbb{P}$.