Feuille d'exercices n° 29

Applications linéaires

Dans toute cette feuille d'exercice, E, F et G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ces applications sont-elles linéaires ?

Exercice 1. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy,y,z) \end{array}$

2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2025(x-y+z-t) \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P'(X) \end{array}$

4) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$

5) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2-3A+2\mathrm{I}_n \end{array}$

6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x+z,z-y,0,0,x+2z) \end{array}$

7) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & (1,x+y,z+t,t+u) \end{array}$

8) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

9) $\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt \end{array}$

Exercice 2. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$$1)\ f\longmapsto f'-2f''+3f,\qquad 2)\ f\longmapsto \exp\circ f\qquad 3)\ f\longmapsto (\sin\times f)'\qquad 4)\ f\longmapsto \big(x\mapsto x\,f''(2025)\big)$$

II Étude d'applications linéaires explicites

Exercice 3. (★) Soit $f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\longmapsto(y-2z,2x+y-4z,x+y-3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$? Pouvait-on le prévoir à l'aide d'un résultat du cours ?

Exercice 4. (★) Notons $F=\big\{(x+y+4z,2x+4z,3x+2y+10z)\,\big|\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big\}$.

1) Montrer qu'il existe $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F=\mathrm{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On que F est définie sous forme paramétrée.
2) Montrer que $F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire F sous la forme $\mathrm{Ker}(g)$ avec $g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. On dit alors que $g(x)=0$ est une équation de F.
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
5) L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Exercice 5. (★) On considère dans cet exercice $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que $u:z\in\mathbb{C}\longmapsto z+\mathrm{i}\overline{z}$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ et donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 6. (★) Montrer que $f:(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\longmapsto(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Est-ce que f est un automorphisme ?

Exercice 7. (★) Montrer que $g:P\in\mathbb{R}[X]\longmapsto XP$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Est-ce que g est un automorphisme ?

Exercice 8. (★) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\longmapsto(u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Déterminer son noyau. Est-il injectif ?

Exercice 9. (★) Montrer que $f \longmapsto (x \mapsto f' + xf(x))$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ Déterminer son image et son noyau. Est-il injectif ? Surjectif ?

Exercice 10. (★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M.

1) a) Montrer que tr définie une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n)$.
   c) Est-ce que tr est injective ? Surjective ? Bijective ?

On introduit l'application $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M - \mathrm{tr}(M)\mathrm{I}_n$.

2) Montrer que f est un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Vérifier que $X^2 + (n-2)X - n + 1$ est un polynôme annulateur de f.
4) En déduire que f est un automorphisme et expliciter sa bijection réciproque.

Exercice 11. (★★) On considère l'application T définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$.

1) Montrer que T est linéaire.
2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de P' en fonction de celui de P.
3) Donner le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.
4) T est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $d : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{K}_n[X]$. Préciser son indice de nilpotence.
2) Déterminer le noyau et l'image de d.
3) Montrer que $\mathrm{Id}_E - d$ est un automorphisme de E et déterminer l'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\mathrm{Id}_E - d$.

Exercice 13. (★★) On considère les applications

$$D : f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto f' \qquad \text{et} \qquad P : f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)dt \end{array} \right.$$

1) Montrer que D et P sont des endomorphismes de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2) Expliciter $D \circ P$ et $P \circ D$.
3) Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$, $\mathrm{Ker}(P)$, $\mathrm{Ker}(D \circ P)$ et $\mathrm{Ker}(P \circ D)$.
4) a) Montrer que $\mathrm{Im}(P) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.
   b) Déterminer $\mathrm{Im}(D)$, $\mathrm{Im}(D \circ P)$ et $\mathrm{Im}(P \circ D)$.
5) D et P sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 14. (★★★) Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, on définit l'application

$$\begin{array}{cccc} T(f) : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{array} \right. \end{array} ,$$

puis l'application $\begin{array}{cccc} T : & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$.

1) Montrer que $T(f) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
2) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
3) Montrer que T est injective.
4) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $xg'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Est-ce que T est surjective ?
5) Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

III Propriétés d'applications linéaires

Exercice 15 – Un énorme classique. (★★) Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E, \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = \lambda x.$$

Montrer que f est une homothétie, c'est-à-dire

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \forall x \in E, \qquad f(x) = \lambda x.$$

On commencera par se donner deux vecteurs x et y de E et on fera deux cas selon que (x,y) est libre ou liée. Dans le cas où ils sont libres, on s'intéressera à $x+y$.

Exercice 16. (★) Soient E' et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E',F') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 17. (★) Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 18. (★) Soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$.

Exercice 19. (★) Soient E, F et G des espaces vectoriels. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f|_{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(f|_{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(f \circ u)$.

Exercice 20. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \end{array} \right.$$

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
3) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$
4) Conclure.

Exercice 21. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que f est soit nulle soit surjective.

Exercice 22. (★) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 23. (★★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$$

Exercice 24 – Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe. (★★★) Soient $n \geqslant 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et $(x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in [\![1 \,;n]\!]$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre.

IV Détermination d'applications linéaires

Exercice 25. (★)

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1), \qquad f(1,1,0) = (1,0), \qquad \text{et} \qquad f(1,1,1) = (1,1).$$

2) Est-elle surjective ? injective ? bijection ?
3) Exprimer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
4) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 26. (★) Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \qquad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_3, \qquad \text{et} \qquad f(e_3 + e_2) = 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3).$$

Déterminer α afin que f soit injective.

Exercice 27. (★★) Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.

1) Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

$$f(e_1) = 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_3, \quad f(e_3) = 0, \quad f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2.$$

2) Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

$$f(e_2 + e_3) = e_2, \quad f(e_1 + e_2) = e_3, \quad f(e_1 - e_3) = e_1.$$

Exercice 28. (★) On se place dans $E = \mathbb{K}^3$. Soient $E_1 = \mathrm{Vect}(1,0,0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$. Montrer qu'il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E_1, \quad u(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E_2, \quad u(x) = -x$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 29. (★★) Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $p \in [\![1\,;n]\!]$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!], \quad f(e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1\,;n]\!], \quad f(e_i) \neq 0$$

1) Donner une inclusion entre $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité.
2) Montrer que si $n = p+1$ alors il y a égalité.

V Projections et symétries

Exercice 30. (★) Reprendre intégralement l'exercice 32 de la feuille d'exercices n° 28 et expliciter à chaque question :

- la projection sur F_1 parallèlement à F_2 et le contraire.
- la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 et le contraire.

Exercice 31. (★)

1) Montrer que $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0)$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
2) Montrer que $s : (x,y,z) \mapsto (x, -z, -y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 32. (★★) Montrer que $s : P \mapsto \dfrac{2}{3}(P(-1)+P(0)+P(1)) - P$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 33. Montrer que $s : P \longmapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques et s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 34. (★) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y\big)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) a) Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de f.
   b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.
3) Donner une base de $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $E_2 = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
4) Posons $p = f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.
   a) Exprimer f en fonction de p et q.
   b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.
5) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 35. (★) Soient p et q deux projecteurs de E distincts et non nuls. Montrer que (p,q) est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 36. (★★) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tel que $p \circ q = q \circ p$.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2) Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ et que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q)$

Exercice 37. (★★) Soient p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   - $p + q$ est un projecteur.
   - $p \circ q = -q \circ p$.
   - $p \circ q = q \circ p = 0$ (on pourra composer par p).

   On pourra composer par p la dernière condition.
2) Montrer que dans ce cas on a $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q)$.

Exercice 38. (★★) Soit p un projecteur de E. On définit

$$C(p) = \{u \in \mathscr{L}(E) \,|\, p \circ u = u \circ p\}$$

1) Montrer que $C(p)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ (on dit que c'est une sous-algèbre). Donner un élément de $C(p)$ distinct de l'application nulle.
2) Montrer que $u \in C(p)$ si et seulement si u laisse stables le noyau et l'image de p.

Exercice 39 – Introduction au lemme des noyaux. (★★) Soient a et b deux scalaire distincts et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(u - a\operatorname{Id}_E) \circ (u - b\operatorname{Id}_E) = 0$.

1) Simplifier $(u - a\operatorname{Id}_E) - (u - b\operatorname{Id}_E)$.
2) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u - a\operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - b\operatorname{Id}_E)$.
3) Déterminer une expression simple de la projection p sur $\operatorname{Ker}(u - a\operatorname{Id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - b\operatorname{Id}_E)$.
4) Vérifier que $u = ap + b(\operatorname{Id}_E - p)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u^n.