Feuille d'exercices n° 26

Analyse asymptotique

I Analyse asymptotique sans développement limités

Exercice 1. (★) Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n - 4\ln(n)$,
2) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$,
3) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$,
4) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$,
5) $\dfrac{1}{n} + \mathrm{e}^{-n}$,
6) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$,
7) $\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n}$,
8) $\sqrt{n^2+3n} - n$,
9) $\dfrac{n^{100!} - 10\,n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}\mathrm{e}^{-n}}$,
10) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{8n^5 - n^2 + 6}}$,
11) $\sin\left(\sqrt{\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}}\right)$,
12) $\dfrac{1}{n} + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
13) $\dfrac{1}{n} + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
14) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{3^k}$,
15) $\ln\left(n^2+n+1\right)$,
16) e^{n^2+n+1},
17) $\dfrac{1}{\sin(1/n)} - \ln(n)$,
18) $\dfrac{\lfloor \mathrm{e}^n \rfloor - \mathrm{e}^n + \sqrt{n^2+n+1}}{\ln(n) - n^{1/3} + \pi}$,

Exercice 2. (★) Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en 0^+.
2) $x \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.
3) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\ln(x))$ en 1.
4) $x \longmapsto (x^4 - 3x^2 + 7)\mathrm{e}^{1/x}$ en $+\infty$,
5) $x \longmapsto \sqrt[7]{x} - 1$ en 1,
6) $\ln(3-x) - \ln(\sqrt{5} - x)$ en $-\infty$,
7) $x \longmapsto 1 - 2x^4 + 9x^3\cos(x) + 7x^5\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$,
8) $x \longmapsto \sqrt{6+x} - 3$ en 3,
9) $x \longmapsto \dfrac{x^2+\ln(x)}{5 + x\mathrm{e}^{-x}}$ en 0^+ et $+\infty$,
10) $x \longmapsto \ln(2\sin(x))$ en $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 3. (★) Calculer la limite (si elle existe) des suites de terme général :

1) $n!\sin\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$,
2) $3^n\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)$,
3) $\dfrac{\ln(2025n^2 + 4n + 5)}{\ln(n)}$,
4) $n\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)$,
5) $n^2\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$,
6) $n^2\left(\sqrt[n]{1+n} - \sqrt[n]{n}\right)$,
7) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$,
8) $\dfrac{1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1 - \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n}}$.

Exercice 4. (★) Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$,
2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}\mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}$,
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}$,
4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x\sin\left(\frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right)$,
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(\tan(x))$,
6) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$,
7) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{5x+1}\ln\left(1 - \frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right)$,
8) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(1+x^2)\left(\mathrm{e}^{\cos(1/x)} - e\right)$.

Exercice 5. (★) Parmi les fonctions f et g suivantes, laquelle est négligeable devant l'autre ?

1) $f : x \longmapsto x\sin(x)\tan(x)$ et $g : x \longmapsto (\mathrm{e}^x - 1)^2$ en 0,

2) $f : x \longmapsto (\ln(x))^2$ et $g : x \longmapsto x\ln(\ln(x))$ en $+\infty$,

3) $f : x \longmapsto x^5$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-1/\sqrt{x}}$ en 0^+,

4) $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(x^3)\sin^2\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 6 – Vitesses de convergence. (★)

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}\mathrm{e}^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Exercice 7. (★)

1) Donner dans chaque cas un équivalent de u_n :

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$.

c) $u_n = n + \mathrm{o}(n) + \sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) + \dfrac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + \mathrm{o}(n\ln(n)) + \sqrt{2\pi} + \mathrm{o}(1)$.

2) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$ puis $x \to +\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) $f(x) = x + \mathrm{o}(x) + x^2\ln(x) + \mathrm{o}\left(x^2\ln(x)\right) + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$.

Exercice 8. (★) A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$, $\alpha > 0$, 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$, 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right)$.

Exercice 9. (★) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner (sans utiliser la formule de Stirling) un équivalent de $\dbinom{p+n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. (★) A l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent des suites suivantes :

1) $u_n = \dbinom{2n}{n}$

2) $u_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}$

3) $u_n = (n!)^{1/n}$

4) $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$

5) (★★) $u_n = \dbinom{n^2}{n}$

Exercice 11. (★★) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Donner un équivalent en 0^+ et 1^- de f. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 12. (★) Soient a et b des réels strictement supérieurs à 1. Montrer que $n^n = \mathrm{o}\left(a^{b^n}\right)$.

Exercice 13. (★) Soient $q \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$.

Exercice 14. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{n+2}\,\mathrm{d}x$$

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+2} + u_n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n.

Exercice 15. (★★) Soient a et b strictement positifs.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ à l'aide d'une comparaison à une intégrale.
2) À l'aide d'une inégalité de convexité sur $\ln$, en déduire que

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a+kb)\right)^{1/n} \sim b(n!)^{1/n} \sim \frac{bn}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 16. (★★★) On pose $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3$, $u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4$, etc. Donner un équivalent de u_n.

II Calcul de développements limités

Exercice 17. (★) Donner les DL des fonctions suivantes en 0 aux ordres indiqués :

1) $f : x \mapsto \ln(1-x)\cos(x)$ à l'ordre 3.
2) $f : x \mapsto \cos(x)\ln(1-x^2)$ à l'ordre 5.
3) $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 4.
4) $f : x \mapsto \sin(x^2)\cos(x)$ à l'ordre 4.
5) $f : x \mapsto (\sqrt{1-x} - 1)\cos(x)$ à l'ordre 3.
6) $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 8.
7) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 3.
8) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 4.
9) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x-x^2}$ à l'ordre 3.
10) $f : x \mapsto \sin(x+x^2)$ à l'ordre 4.
11) $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}}$ à l'ordre 6.
12) $f : x \mapsto \sin^2(x)$ à l'ordre 6.
13) $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 5.
14) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x\cos(4x)}$ à l'ordre 3.
15) $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+\mathrm{Arctan}^2(x)}$ à l'ordre 5.
16) $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x+x^2}\right)$ à l'ordre 2.
17) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)}$ à l'ordre 6.
18) $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ à l'ordre 5.
19) $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t$ à l'ordre 6.

Exercice 18. (★★) Donner les DL des fonctions suivantes en 0 aux ordres indiqués :

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.
2) $x \mapsto \tan(\pi\mathrm{e}^x)$ à l'ordre 4.
3) $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x+x^2+x^3}$ à l'ordre 4.
4) $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4.
5) $x \mapsto (\cos(x))^x$ à l'ordre 5.
6) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$ à l'ordre 7.
7) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
8) $x \mapsto \ln(3\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ à l'ordre 3.
9) $x \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2}$ à l'ordre 2025.
10) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$ à l'ordre 5.
11) (★★★) $x \mapsto \ln^3(1+x)$ à l'ordre 7.

Exercice 19. (★★) Donner les DL de

1) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3.
2) $x \mapsto 3 - \sqrt{5-2x} - x$ en 2 à l'ordre 3.
3) $x \mapsto \ln(\tan(x))$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à ordre 3.
4) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$ en 1 à l'ordre 2.
5) $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$ à l'ordre 3.
6) $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en 1 à l'ordre 2025.

Exercice 20 – DL de $\tan$ en 0. (★) En utilisant l'exercice .... de la feuille d'exercice n° 25, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Exercice 21. (★★★) Montrer que $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque qu'on notera f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$. Donner le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Exercice 22. (★★) Donner le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

On pourra s'aider du théorème de primitivation d'un DL.

III Analyse asymptotique avec développement limités

Exercice 23. (★★) Donner un équivalent simple des suites de termes généraux :

1) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2) $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n)$.
3) $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4) $\dfrac{\sin(1/n)+\sin(2/n)}{\mathrm{e}^{1/n}-\mathrm{e}^{2/n}}$
5) $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
6) $\exp(\sin(\mathrm{e}^{-n})) - 1$
7) $\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}-1}{\ln(1+1/2n)}$
8) $\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}-2}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^3-1}}$
9) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n/2} - 1$
10) $n\tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$
11) $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
12) $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$
13) $\left(\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n^2}\right)\right)^{1/n}$
14) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15) $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$
16) $\left(n^3\left(\mathrm{e}^{1/n}-\mathrm{e}^{-1/n}\right)\right)^n$ ‘
17) $\dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ où $\alpha > 0$.
18) $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$.
19) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{1/n}$
20) $\ln(n) - \dfrac{5n^2+3n+1}{1-\mathrm{e}^{2/n}}$.
21) $\sin\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - \mathrm{e}^{1/n}\right)$
22) $1 - \sqrt[9]{1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}$.
23) $\dfrac{n\sin(1/\sqrt{n})\,\mathrm{Arctan}(n!)}{\sqrt[4]{n^6+n^5}-n\sqrt{n}}$.

Exercice 24. (★★) Donner un équivalent simple des quantités suivantes :

1) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0.
2) $x \mapsto \sin(3x) - \tan(x)$ en 0.
3) $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$ en $+\infty$.
4) $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0 et $+\infty$.
5) $x \mapsto \ln\left(4x^4 - 2\cos(x) + 3\right)$ en 0 et $+\infty$.
6) $x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{Arctan}(2x)\left(\sqrt[5]{1+3x} - 1\right)}{1 + x^2 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}$ en 0 et $+\infty$.
7) $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3}$ en 0.
8) $x \mapsto (8+x)^{1/3} - 2$ en 0.
9) $x \mapsto \ln(\mathrm{sh}(x)/x)$ en $+\infty$.
10) $x \mapsto \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$ en $+\infty$.
11) $x \mapsto \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right) - \ln(3)$ en 0.
12) $x \mapsto \ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$.
13) $x \mapsto \ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 2\ln(2)$ en 0.
14) $x \mapsto (x+1)^{1/x} - x^{1/x}$ en $+\infty$.
15) $x \mapsto x^{x^{1/x}}$ en $+\infty$.
16) $x \mapsto \sin(x)$ en π.
17) $x \mapsto 1 + \cos(x)$ en π.
18) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ en -1.
19) $x \mapsto x^x - 4$ en 2.
20) $x \mapsto x^x - x$ en 1.
21) $x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$ en 0.
22) $x \mapsto \mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}}$ en e.

Exercice 25. (★★) Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\ln(e+x))^{1/x}$.
2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1}$.
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)^{\tan(x)} - 1}$.
4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\mathrm{e}^x(x+1)} - \frac{1}{x\cos(x)}$.
5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\ln(x)/x} - x}{x\left(x^x - 1\right)}$.
6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x) + \sin(x) - 2x}{x\left(\mathrm{ch}(x) + \cos(x) - 2\right)}$.
7) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^{1/3} - 2^{1/3}}$.
8) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(\tan(x) - x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$.
10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{1 - x + \ln(1+x) - \cos(x)}$.
11) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{p+q}(x) - 1}{\left(\sin^p(x) - 1\right)\left(\sin^q(x) - 1\right)}$.
12) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$.
13) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tan(x)^{\sin(x)}$.

Exercice 26. (★★) Montrer que les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\mathrm{Arctan}(t)}$ sont prolongeables par continuité en 0 et que les prolongements sont de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 27. (★★) Déterminer les ordres maximaux auxquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1) $x \mapsto \sqrt{x}$.
2) $x \mapsto x^{13/3}$.
3) $x \mapsto |x|^n$ (où $n \geqslant 1$).

Exercice 28. (★) Soit f de classe $\mathscr{C}^3$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0)}{h^3}.$$

Exercice 29 – Un petit bout de la preuve du TCL. (★) Soit $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\sigma^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\sigma^2 t^2/2}.$$

Exercice 30. (★) Notons $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}(0)$ sans calculer les dérivées successives de f.

Exercice 31 – Fonctions log-convexe, le retour. (★★) Dans l'exercice 19 du TD n° 20, on a montré que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction log-convexe sur l'intervalle I (c'est-à-dire $\ln \circ f$ est convexe sur I), alors f^α est convexe sur I pour tout $\alpha > 0$. Montrer que la réciproque est vraie.

IV Développements asymptotiques

Pour les développements asymptotiques de Arctan *en* $+\infty$*, on utilisera le fait que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 32. (★)

1) Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \longmapsto \ln\left(\sqrt{x-1}\right)$ à la précision $1/x^2$.
2) Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 33. (★★) Soit $f \in \mathscr{C}^2([0\,;1]\,,\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$ au voisinage de $+\infty$ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

Exercice 34. (★) Donner le développement asymptotique de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^8}$.

Exercice 35. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\big(\,\mathrm{Arctan}\,(nu_n)\,\big)^n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi\ell}}.$$

Exercice 36. (★★) Soit $n \geqslant 5$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$
2) En déduire que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 37. (★) Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$ (on précisera les positions relatives) :

1) $f : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$
2) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{x}\right)$
3) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}\,\mathrm{Arctan}(x)$
4) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2/x}\sqrt{x^2+x+1}$
5) $f : x \mapsto (x+5)\mathrm{e}^{-1/x}$

Exercice 38. (★) Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$ (on précisera les positions relatives) :

1) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^5\mathrm{e}^{2/x}}{(x-1)^4}$
2) $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$
3) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+1}$
4) $f : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}$
5) $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2+9x+1} - x^2\mathrm{e}^{\pi/x}$
6) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/(x+3)}\sqrt{x^2+5x+4}$
7) $f : x \mapsto x^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{x^2}\right)$

Exercice 39. (★★) Étudier la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in]0\,;1[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}.$$

Déterminer deux réels a et b tels que

$$u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 40. (★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = \mathrm{o}\,(x_n)$.
3) Montrer que $x_n \sim n$. Dans la suite on écrit $x_n = n(1+\alpha_n)$ avec $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4) Justifier que $\alpha_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \mathrm{o}\,(\ln n)$. Pourquoi n'écrit-on pas $x_n \sim n - \ln(n)$?
   Dans la suite on écrit $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5) Montrer que $\beta_n \sim -\dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$
6) (★★★) Montrer enfin que

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

Exercice 41. (★★★)

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, il existe un unique réel noté $f(x) \geqslant 1$ tel que

$$f(x) + \sqrt{\ln(f(x))} = x$$

2) Donner un développement asymptotique de f à 3 termes lorsque x tend vers $+\infty$.
3) Montrer que $f(1+t) - 1 \sim t^2$ au voisinage de 0.
4) Donner l'allure du graphe de f.

Exercice 42. (★★★) Dans la feuille d'exercices n° 14, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$. On a montré que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$. Déterminer un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{2}$.

Exercice 43. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \left[2n\pi\,; 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x_n) = \dfrac{1}{x_n}$.
2) Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.