Devoir surveillé n° 9 – Sujet B

samedi 10 mai 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Problème : Autour des racines carrées d'un endomorphisme

Rappels et notations

On rappelle que, lorsque f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$ et, pour tout entier $k \geqslant 2$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$. En particulier $f^2 = f \circ f$.

Lorsque f est un endomorphisme de E et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, on note $P(f)$ l'endomorphisme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n.$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$,

$$P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = a_0 x + a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \cdots + a_n f^n(x).$$

Si P est le polynôme nul, alors on convient que $P(f)$ désigne l'endomorphisme nul de E. On rappelle que, si P et Q sont des polynômes, alors

- pour tous réels λ et μ, $(\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f)$.
- $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$.

Problématique et plan du problème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme f de E admet une racine carrée si il existe un endomorphisme u de E telle que $u^2 = f$. On dit alors que u est une racine carrée de f.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'existence de racines carrées de f et d'étudier quelques unes de leurs propriétés des racines carrées de f lorsqu'elles existent. Il consiste en sept parties :

- Les parties A et C se concentrent sur quelques résultats généraux utiles aux autres parties.
- Les parties B, D, E sont indépendantes entre elles mais utilisent des résultats de la partie A. La partie E utilise aussi des résultats de la partie C.
- La partie F est indépendante du reste du problème.
- La partie G est indépendante du reste du problème à l'exception de la question G2c.

Partie A : Quelques résultats généraux

On suppose que f admet une racine carrée u.

1) Montrer que $-u$ est encore une racine carrée de f.

2) Montrer que u et f commutent.

3) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(f)$ et que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$.

4) En déduire que f est bijective si et seulement si u est bijective.

5) On suppose de plus que E est de dimension finie. Justifier que, si $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f)$.

Partie B : Une famille d'exemples en dimension 3

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f((x, y, z)) = (-3x - 4y + 6z, 6x + 7y - 9z, 2x + 2y - 2z)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$.
On impose que v_1 soit à coordonnées entières.

3) a) Montrer que $2x + 2y - 3z = 0$ est une équation de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Notons $v_2 = (0, 3, 2)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$. Vérifier, à l'aide de la question précédente que (v_2, v_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   c) En déduire[1] que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

4) a) En déduire que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base puis montrer que $f^2 = f$ à l'aide de calculs dans la base $\mathscr{B}$.
   Tout calcul direct de f^2 à partir de l'expression explicite de f est exclu.
   b) Comment aurait-on pu obtenir la question B3c autrement ? Proposez deux méthodes différentes (sans les mettre en œuvre).

5) Justifier que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, il existe un unique endomorphisme f_α de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f_\alpha(v_1) = 0, \qquad f_\alpha(v_2) = v_2 \qquad \text{et} \qquad f_\alpha(v_3) = \alpha v_3.$$

Vérifier que $f_1 = f$ et montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Im}(f_\alpha) = \mathrm{Im}(f)$ puis que $\mathrm{Ker}(f_\alpha) = \mathrm{Ker}(f)$.

6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Supposons que f_α admette une racine carrée u.
   a) À l'aide de la partie A, montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(f_\alpha)$ et que $\mathrm{Im}(f_\alpha)$ est stable par u.
   b) En déduire qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$u(v_2) = av_2 + cv_3 \qquad \text{et} \qquad u(v_3) = bv_2 + dv_3.$$

   c) Montrer que $a^2 + bc = 1$, $d^2 + bc = \alpha$ et $(a + d)b = (a + d)c = 0$.
   d) Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, alors $b = c = 0$ et le couple (a, d) peut prendre 4 valeurs que l'on explicitera.
   e) Montrer que, si $\alpha = 1$, alors $bc \leqslant 1$ et exprimer (a, d) en fonction de b et c.
   f) Que dire si $\alpha < 0$?

On vérifie (on ne demande pas de le faire) que les réciproques sont vraies : f_α admet quatre racines carrées si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, une infinité si $\alpha = 1$ et aucune si $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

1. On lira la question suivante avant de foncer tête baissée sur celle-ci.

7) Proposer une racine carrée de f qui n'est pas pas f.
On pourra se contenter de décrire l'action de f sur la base $\mathscr{B}$.

On voit sur cette famille d'exemples que la recherche de racines carrées d'endomorphisme est complexe : rien qu'en dimension 3, il peut y avoir quatre racines carrées, une infinité, aucune... voire d'autres cas de figure encore.

Partie C : Rang d'une racine carrée d'endomorphisme

Dans cette partie E désigne un espace vectoriel quelconque de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme quelconque de E admettant une racine carrée u.

1) On note $\widetilde{u}$ la restriction de u à $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\widetilde{u}) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\widetilde{u}) = \mathrm{Im}(f).$$

2) Montrer alors que

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

3) a) En déduire que $2\,\mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(f) + n$.
   b) Montrer que $2\,\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(f) + n$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Partie D : Le cas diagonalisable avec valeurs propres simples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe[1] une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ et

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

On dit alors que f est diagonalisable avec valeurs propres simples. Supposons enfin que f admette une racine carrée u.

1) a) Justifier que, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe des scalaires $b_{1,j}, \dots, b_{n,j}$ tels que $u(\varepsilon_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\varepsilon_i$.
   b) En utilisant le fait que u et f commutent (cf. partie A), établir que $b_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   c) En déduire que $\lambda_i = b_{i,i}^2$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

2) Conclure que f admet 2^n racines carrées lorsque $\lambda_1 > 0$, 2^{n-1} lorsque $\lambda_1 = 0$ et aucune lorsque $\lambda_1 < 0$.

On a dans la partie B que, lorsque les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ ne sont pas tous distincts, f peut admettre une infinité de racines carrées ou aucune racines carrées. Le cas général est difficile à décrire intégralement. Par ailleurs, toute matrice n'est pas diagonalisable (comme nous allons le voir dans la prochaine partie) et, quand elle l'est, ses valeurs propres ne sont pas forcément simples (c'est tout un chapitre en deuxième année).

Partie E : Le cas nilpotent

1) On définit l'application φ sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \varphi(P) = P(-1)\,(X^3+1) + P(0)\,X(X+1).$$

   a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
   b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   c) Expliciter φ^2 puis vérifier que φ^3 est nul.

L'endomorphisme φ est un exemple d'endomorphisme dit nilpotent. Nous allons étudier plus généralement ce cas de figure dans cette partie.

1. C'est le cas des endomorphismes f_α de la partie B lorsque $\alpha \notin \{0;1\}$. Mais dans cette partie, nous revenons en dimension quelconque.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n. On se donne f un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

2) On suppose que f est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.
   a) Montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   b) Conclure que, si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

On suppose que $f \neq 0$ et on note p le plus petit entier tel que $f^p = 0$ et on l'appelle l'indice de nilpotence de f. Il vérifie donc $p \geqslant 2$, $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

3) Justifier l'existence de p.

4) Supposons que f admette une racine carrée u. On a donc $u^{2p-2} \neq 0$ et $u^{2p} = 0$.
   a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que, pour tout $k \in [\![0\,;2p-2]\!]$, $u^k(x_0) \neq 0$.
   b) On se donne $a_0, \dots, a_{2p-2}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} a_k u^k(x_0) = 0$.
      En raisonnant par l'absurde, montrer que ces réels sont nuls.
   c) Déduire de cette absurdité que $2p - 1 \leqslant n$.

   On vient de montrer une condition nécessaire pour que f nilpotente non nulle admette une racine carrée : si f admet une racine carrée, alors l'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à $\dfrac{n+1}{2}$.
   d) L'endomorphisme de l'exemple de la question E1 admet-il une racine carrée ?

Dans la suite de cette partie, nous examinons le cas particulier où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Notons r le rang de f.

5) a) Montrer que f est nilpotente d'indice 2 et que $n = 2r$.
   b) Supposons que f admette une racine carrée u. À l'aide des parties A et C, montrer alors que $4(n - \mathrm{rg}(u)) = n$.

   Ainsi n est un multiple de 4.

6) Réciproquement, supposons que n est un multiple de 4 et que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Notons $k = \dfrac{n}{4}$. La question précédente assure que f est nilpotente d'indice 2 et que son rang est $r = \dfrac{n}{2} = 2k$.
   a) Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_r$ des vecteurs de E tels que $(f(x_1), \dots, f(x_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) En déduire que $(x_1, \dots, x_r, f(x_1), \dots, f(x_r))$ est une base de E.
   c) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que
   $$\forall i \in [\![1\,;k]\!], \qquad u(x_{2i-1}) = x_{2i}, \quad u(x_{2i}) = f(x_{2i-1}), \quad u(f(x_{2i-1})) = f(x_{2i}), \quad u(f(x_{2i})) = 0$$
   et montrer que $u^2 = f$.

On vient de montrer que, si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ (ce qui est un cas particulier des endomorphismes nilpotents d'indice 2), alors f admet une racine carrée si et seulement si n est un multiple de 4.

Partie F : Le cas des endomorphismes scalaires

Dans cette partie E désigne un espace vectoriel quelconque (pas forcément de dimension finie) non réduit à $\{0_E\}$.

1) Que dire d'une racine carrée de Id_E ? Justifier que $u \in \mathscr{L}(E)$ est une racine carrée de Id_E si et seulement si $p = \frac{1}{2}(u + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur de E. Le projecteur p est alors appelé projecteur associé à u.

2) Supposons, dans cette question uniquement, que $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On rappelle que E est alors de dimension infinie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le degré du polynôme associé est au plus n. Notons aussi
$$G_n = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, \forall k \in [\![0\,;n]\!],\ f^{(k)}(0) = 0\}.$$

a) Justifier que F_n est l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ par une application linéaire injective de $\mathbb{R}[X]$ dans E. En déduire que F_n est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n+1$. On admet que G_n est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que $F_n \oplus G_n = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

c) Est-ce que G_n est de dimension finie ?

d) En déduire une expression explicite d'une racine carrée de Id_E dont le projecteur associé est de rang $n+1$.

Cette question étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a donc une infinité de racines carrées de Id_E dans ce cas particulier.

3) Supposons, dans cette question, que E est un espace vectoriel quelconque de dimension finie supérieure ou égale à 2.

a) Justifier que E admet une infinité de droite vectorielles puis en déduire qu'il existe une infinité de projecteurs de rang 1.

b) En déduire que Id_E admet une infinité de racines carrées.

c) Que dire des racines carrées de $\alpha\,\mathrm{Id}_E$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$?

4) Supposons toujours que E est un espace vectoriel quelconque de dimension finie non nulle. Supposons que $-\mathrm{Id}_E$ admet une racine carrée u, c'est-à-dire $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Justifier qu'il existe $x_1 \in E\backslash\{0_E\}$ et que $(x_1, u(x_1))$ est libre.

b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On suppose qu'il existe $x_1,\dots,x_n$ dans E tels que la famille

$$(x_1,\dots,x_{n-1},u(x_1),\dots,u(x_{n-1}))$$

est libre. Montrer que, si $\dim(E) \geqslant 2n-1$, alors il existe $x_n \in E$ tel que

$$(x_1,\dots,x_{n-1},x_n,u(x_1),\dots,u(x_{n-1}))$$

est libre.

c) Montrer que l'ajout de $u(x_n)$ à cette famille libre conserve sa liberté.

d) En déduire que $\dim(E)$ est paire.

e) Réciproquement, montrer que, si $\dim(E)$ est paire, alors $-\mathrm{Id}_E$ admet une racine carrée.

f) Que dire des racines carrées de $\alpha\,\mathrm{Id}_E$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$?

Partie G : Racines carrées en lien avec la dérivation des polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'endomorphisme d de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad d(P) = P'.$$

On ne demande pas de montrer que d est un endomorphisme de E.

On note simplement I pour désigner Id_E. L'objectif est de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme $d+\lambda\mathrm{I}$ admet une racine carrée si et seulement si $\lambda > 0$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(d)$ puis prouver que $\mathrm{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2) Supposons que $d+\lambda\mathrm{I}$ admette une racine carrée u.

a) Montrer que d et u commutent et justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(1) = a$.

b) Montrer alors que $\lambda \geqslant 0$.

c) Montrer que d est nilpotent d'indice $n+1$ puis conclure que $\lambda > 0$.
La notion d'endomorphisme nilpotent est définie dans la partie E.

3) Nous venons donc de montrer que si $d + \lambda \mathrm{I}$ admet une racine carrée, alors $\lambda > 0$. Nous allons maintenant montrer la réciproque : supposons que $\lambda > 0$.

a) Justifier qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} P_n(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

b) Notons Q_n et R_n le quotient et le reste de la division euclidienne de P_n^2 par X^{n+1}. Justifier que

$$1 + x \underset{0}{=} R_n(x) + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

c) En déduire que $R_n = 1 + X$.

Posons $g = P_n\left(\frac{1}{\lambda} d\right)$, le polynôme P_n en l'endomorphisme $\frac{1}{\lambda} d$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

d) Vérifier que $g^2 = \mathrm{I} + \frac{1}{\lambda} d$.
On pensera bien à utiliser les formules sur les polynômes d'endomorphismes, rappelées en préambule.

e) En déduire un endomorphisme u tel que $u^2 = d + \lambda \mathrm{I}$.