Devoir surveillé n° 9 – Sujet A

samedi 10 mai 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Questions en vrac

1) Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions et la signature de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + 5y = z - t\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + 5y = z^2 - t\}.$$

Si oui, en donner une base.

3) Les familles suivantes sont-elles libres ?

a) $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,1)$, $w = (1,3,1)$, $x = (1,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

b) $u = (1,1,1,1)$, $v = (1,2,-1,1)$, $w = (2,-1,1,2)$, $x = (-6,-3,2,-6)$ dans $\mathbb{R}^4$.

4) Montrer que les vecteurs $u = (-2,1,0)$, $v = (2,2,2)$ et $w = (0,1,2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base.

5) Montrer que la famille de fonctions $\big(x \mapsto \sin^k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

6) On suppose que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est une famille libre d'un espace vectoriel E. Montrer que la famille $(x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_3 - x_4, x_4 + x_5, x_5 - x_1)$ est encore libre.

7) Expliciter $F = \mathrm{Vect}((1,2,1,2),(1,0,1,-1),(-1,4,-1,7))$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations [1].

8) Montrer que $E_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \;\middle|\; \displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et E_2, l'ensemble des fonctions constantes, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2, ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

9) Montrer que $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2, ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. C'est-à-dire, trouver un système linéaire homogène (d'un ou plusieurs équations) dont les éléments de F sont exactement les solutions.

10) Notons
$$f : (x, y, z) \longmapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$
   a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.
   b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ puis une base de $\mathrm{Ker}(f)$ sans résoudre de systèmes.

11) Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(-1) = P(1) \text{ et } P'(-1) = P(0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_3[X]$ et en déterminer un supplémentaire.

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En ne faisant aucun calcul, déterminer la dimension de $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(-1) = P(1)\}$ et lui-trouver un supplémentaire.

13) Montrer que
$$u : aX^2 + bX + c \longmapsto bX + c - 2a$$
est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner ses éléments caractéristiques.

14) On admet que
$$f : (x, y, z) \longmapsto (3x + 4y + 4z, -x - y - 2z, -x - 2y - z)$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

15) Notons $f : P \longmapsto P - X^2 P''$.
   a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$, au départ et à l'arrivée, est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
   c) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

16) a) Justifier qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$f(1) = \mathrm{I}_2, \quad f(4 - X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f((X - 2)(X + 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f((X - 1)^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   b) Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
   c) Expliciter la matrice $f(P)$ pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

17) On suppose que E est un espace vectoriel de dimension n et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\dim(F \cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - n$.

18) Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :
$$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$
On commencera par appliquer le théorème du rang à $g\big|_{\mathrm{Im}(f)}$.