Devoir surveillé n° 8

samedi 5 avril 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Questions en vrac

1) Montrer par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2kn}{(3k+n)(4k+n)(5k+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

2) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\sin(2x)}{1+\mathrm{e}^{3x}}.$$

3) Montrer que la fonction

$$f : x \longmapsto \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^3-3x^2+x+1}$$

admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4) Déterminer un équivalent de

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}$$

quand n tend vers $+\infty$.

5) Déterminer la nature de la série

$$\sum \operatorname{Arctan}(n!)\left(1-\cos\left(\frac{\ln(n)}{n^{5/6}}\right)\right).$$

6) Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{4/5}+\cos(n)}.$$

7) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5n^2+3n-4}{n!}(-2)^n.$$

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{n+t}}\,dt.$$

À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que

$$I_n \underset{+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{2n^{3/2}} + \mathsf{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right).$$

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \left[n\pi\,; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x\tan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans I_n.

b) Justifier que $x_n = n\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que

$$x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3\pi^3 n^3} + \mathsf{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On obtiendra chacun des trois termes de ce développement asymptotique « tour à tour » (et chacun permettra de gagner des points).

Problème : Une série en lien avec la fonction ζ de Riemann

Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge et on note

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier une fonction définie par la somme d'une série convergente et de montrer au passage que la série $\sum \frac{\zeta(n)}{2^n}$ converge et de calculer sa somme.

Partie A : La constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}, \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln(n).$$

1) Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

2) En déduire qu'il existe un réel γ (que l'on ne cherchera pas calculer) tel que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathsf{o}\left(1\right).$$

Le réel γ s'appelle la constante d'Euler.

3) a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n + \frac{1}{2}H_n = H_{2n}.$$

b) En déduire que que

$$2U_n - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln(2).$$

Partie B : Une fonction définie à l'aide d'une série

1) Pour tout $x \in \,]-\infty\,;1]$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n}\right)$ converge. On note alors

$$F_1(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n}\right).$$

2) Calculer $F_1(0)$, $F_1(1)$ et $F_1(-1)$.

3) Justifier que $F_1\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln(2)-1$.

4) Sans utiliser de dérivées, justifier que F_1 est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ puis en déduire le signe de F_1 sur $]-\infty\,;1]$.

Partie C : Régularité de la fonction F_1

1) Pour tous $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $x \in \,]-\infty\,;1]$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{(n-x)^k}$ converge. On note alors

$$F_k(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^k}.$$

2) On se donne $x \in [-1\,;1]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.
   a) Justifier que, pour tout $y \in [-1\,;1]$,

$$\left|\frac{1}{(n-y)^k}-\frac{1}{(n-x)^k}-\frac{k(y-x)}{(n-x)^{k+1}}\right| \leqslant (y-x)^2\frac{k(k+1)}{2(n-1)^{k+2}}.$$

   b) En déduire que, lorsque $y \in [-1\,;1]\backslash\{x\}$,

$$\left|\frac{F_k(y)-F_k(x)}{y-x}-kF_{k+1}(x)\right| \leqslant |y-x|\times\frac{k(k+1)}{2}F_{k+2}(1).$$

   c) En déduire que F_k est dérivable en x et préciser $F_k'(x)$.

3) Conclure que F_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1\,;1]$ et que

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad F_1^{(k)}(x)=k!\,F_{k+1}(x).$$

   On peut montrer (on ne demande pas de le faire) que F_1 est dérivable sur tout $]-\infty\,;1]$ et que la formule ci-dessus reste valable sur $]-\infty\,;1]$.

4) Montrer que, pour tous $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $t \in [0\,;1[$, $F_{k+2}(t) \leqslant \zeta(2)$.

5) Soit $x \in [0\,;1[$.
   a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|F_1(x)-\sum_{k=1}^{n}\big(\zeta(k+1)-1\big)x^k\right| \leqslant |x|^{n+1}\zeta(2).$$

   b) En déduire que la série $\sum(\zeta(n)-1)x^n$ converge et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\zeta(n)-1\big)x^n = xF_1(x).$$

   c) Donner enfin la valeur exacte de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\zeta(n)}{2^n}$.

Partie D : Étude locale de la fonction F

On définit la fonction F sur $]-\infty\,;1[$ par

$$\forall x \in\,]-\infty\,;1[\,, \qquad F(x) = \frac{1}{1-x} - 1 + F_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right)$$

1) On rappelle (on l'a vu trois fois cette année) que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Justifier alors que

$$F(x) - \frac{\pi^2}{6}x \underset{x\to 0}{\sim} \zeta(3)x^2.$$

Quelle est la position relative de la courbe de F par rapport à sa tangente en 0 ?

2) Calculer la limite de F en 1^-.

3) Soient $x \in \mathbb{R}_-^*$. Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Notons

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right).$$

a) Déterminer les variations de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t-x} - \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En faisant une comparaison série/intégrale, montrer que

$$S_N(x) - \frac{x}{N(N-x)} \leqslant \int_1^N \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t} \right) dt \leqslant S_N(x) - \frac{x}{1-x}.$$

c) Calculer cette intégrale puis en déduire que

$$-\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \leqslant F(x) \leqslant -\ln(1-x).$$

d) Conclure que $F(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\ln(-x)$.

4) Représenter graphiquement l'allure de la courbe représentative de F.
On tracera aussi les tangentes et asymptotes révélées par les questions précédentes, quelques points particuliers et la courbe de $x \longmapsto -\ln(-x)$. On fera aussi attention à la convexité/concavité de la fonction.