

# Devoir surveillé n° 7 – Sujet C

samedi 15 mars 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux**.

Veillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\Rightarrow$  et  $\Leftrightarrow$  sauf si vous savez les utiliser correctement.

## EXERCICE 1 : UNE DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

---

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note

$$F_{n,p} = \frac{X^p}{X^n + 1}.$$

- 1) Soit  $r \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Déterminer la décomposition en éléments simples de  $F_{n,r}$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .  
On fera intervenir le complexe  $\zeta = e^{\frac{i\pi}{n}}$ .
- 2) En déduire la décomposition en éléments simples de  $F_{n,p}$  dans  $\mathbb{C}(X)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .  
On ne demande pas de factoriser la partie entière éventuelle de la fraction rationnelle.

## EXERCICE 2 : UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

---

On se donne  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère dans tout cet exercice l'équation

$$(E) \quad P(X^2) = P(X+a)P(X+b),$$

d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions **non constantes** de l'équation (E).

On admet temporairement (ce sera montré à la question C1) que tout polynôme de  $\mathcal{E}$  est unitaire.

### Question préliminaire

Déterminer les solutions de (E) qui sont constantes.

### Partie A : Le cas particulier où $a = b$

Supposons dans cette partie uniquement que  $a = b$ . L'équation (E) est donc

$$P(X^2) = (P(X+a))^2$$

d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

- 1) Soit  $P \in \mathcal{E}$ . Notons  $r$  le nombre de racines complexes distinctes de  $P$ .
  - a) Justifier que  $r \in \mathbb{N}^*$ .

- b) Déterminer le nombre de racines complexes distinctes de  $(P(X+a))^2$ .
  - c) Déterminer le nombre de racines complexes distinctes de  $P(X^2)$  selon que 0 est racine de  $P$  ou non.
  - d) En déduire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P = X^n$ .
- 2) Décrire alors  $\mathcal{E}$  lorsque  $a \neq 0$  et lorsque  $a = 0$ .

**Partie B : Le cas particulier où  $a = 0$  et  $b = -1$**

Supposons dans cette partie uniquement que  $a = 0$  et  $b = -1$ . L'équation (E) est donc

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

Soit  $P \in \mathcal{E}$ . Soit  $\alpha$  une racine complexe de  $P$ .

- 1) a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha^{2^n}$  est encore racine de  $P$ .  
b) En déduire que  $\alpha = 0$  ou  $\alpha \in \mathbb{U}$ .
- 2) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$ .  
a) Montrer que, si  $\alpha = 0$  alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est racine de  $P$ .  
b) En déduire que  $\alpha \neq 0$ .
- 3) Montrer alors que  $|\alpha + 1| = 1$  et en déduire les valeurs possibles pour  $\alpha$ .
- 4) Conclure qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $P = (X^2 + X + 1)^n$ .
- 5) Décrire alors l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

**Partie C : Le cas général**

On revient au cas général, c'est-à-dire que  $a$  et  $b$  sont quelconques. On suppose que  $\mathcal{E}$  est non vide.

- 1) a) Montrer que tout polynôme de  $\mathcal{E}$  est unitaire.  
b) Montrer que  $\mathcal{E}$  est stable par produit.
- 2) Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathcal{E}$  qui ont le même degré. Notons  $n \in \mathbb{N}^*$  leur degré commun. L'objectif de cette question est de montrer que  $P = Q$ . On pose  $R = P - Q$ .  
a) Que dire sur le degré  $R$ ?  
b) Vérifier que

$$R(X^2) = P(X+a)R(X+b) + R(X+a)Q(X+b).$$

- c) En déduire que  $R = 0$  et conclure.
- 3) Montrer que  $\mathcal{E}$  admet un unique polynôme  $M$  de degré minimal.

On note alors  $m$  le degré de  $M$ . On a  $m \in \mathbb{N}^*$  puisque  $M \in \mathcal{E}$  donc  $M$  est non constant. Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  les racines complexes distinctes de  $M$  et  $k_1, \dots, k_r$  leurs multiplicités respectives de sorte que

$$M = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{k_i}.$$

- 4) On suppose que  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme unitaire tel qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  vérifiant  $P^n \in \mathcal{E}$ .  
a) Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$a^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( a - e^{\frac{2ik\pi}{n}} b \right).$$

b) En déduire que, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,

$$A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( A - e^{\frac{2ik\pi}{n}} B \right).$$

c) À l'aide de cette dernière identité polynomiale, établir qu'il existe  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que  $e^{\frac{2ik\pi}{n}} P \in \mathcal{E}$  et conclure que  $P \in \mathcal{E}$ .

5) Soit  $P \in \mathcal{E}$ . Notons  $n$  son degré puis  $d = m \wedge n$ . On introduit  $m'$  et  $n'$  tels que  $m = dm'$  et  $n = dn'$ .

a) Établir que  $M^{n'} = P^{m'}$ .

b) En déduire qu'il existe  $p_1, \dots, p_r$  des entiers naturels non nuls tels que

$$P = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{p_i}.$$

c) Justifier que, pour tout  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $p_i m' = k_i n'$  puis que  $(p_i \wedge k_i) n' = p_i$  et  $(p_i \wedge k_i) m' = k_i$ .

d) En déduire qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  unitaire tel que  $P = Q^{n'}$  et  $M = Q^{m'}$

e) À l'aide de la question C4c, montrer enfin que  $P$  est une puissance de  $M$ .

6) Décrire alors l'ensemble  $\mathcal{E}$  en fonction du polynôme  $M$ .

7) Montrer, lorsque  $a = -\frac{1}{4}$  et  $b = \frac{3}{4}$ ,  $M$  est un polynôme degré 1 que l'on explicitera. Décrire l'ensemble  $\mathcal{E}$  dans ce cas.

### EXERCICE 3 : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES CIRCULANTES

On fixe  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ . On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Pour tout  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ , on note

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et on dit que le polynôme  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  est son polynôme associé.

On note  $\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \{C(a_0, \dots, a_{n-1}) \mid (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$ . Il s'agit donc d'un sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  appelé ensemble des matrices circulantes.

Parmi les matrices circulantes, on note

$$A = C(0, 1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit  $(A)_{n,1} = 1$ , pour tout  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $(A)_{k,k+1} = 1$ , et les autres coefficients de  $A$  sont nuls.

Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , notons  $E_k$  la matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la  $k^{\text{ième}}$  ligne. Remarquons que :

- $C(1, 0, 0, 0, \dots, 0) = I = (E_1 | E_2 | \dots | E_{n-1} | E_n)$
- $C(0, 1, 0, 0, \dots, 0) = A = (E_n | E_1 | E_2 | \dots | E_{n-1})$
- $C(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = (E_{n-1} | E_n | E_1 | E_2 | \dots | E_{n-2})$
- etc.

On rappelle que, lorsque  $P = \sum_{k=0}^d c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , alors  $P(M)$  désigne la matrice  $\sum_{k=0}^d c_k M^k$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour tous  $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$\lambda P(M) + \mu Q(M) = (\lambda P + \mu Q)(M) \quad \text{et} \quad P(M) \times Q(M) = (PQ)(M) = Q(M) \times P(M).$$

### Partie A : Cas particulier où $n = 3$

On suppose dans cette partie uniquement que  $n = 3$ . On a alors  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et on pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que  $Q^{-1} = \frac{1}{3}\overline{Q}$  où  $\overline{Q}$  désigne la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de  $Q$  par leur conjugué.

2) On se donne  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$ . On pose  $C = C(a_0, a_1, a_2)$  et on note

$$P_C = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

son polynôme associé.

a) Vérifier que  $C = P_C(A)$ .

b) Vérifier par le calcul que  $D = Q^{-1}AQ$  est une matrice diagonale.

c) En déduire que  $Q^{-1}CQ$  est aussi une matrice diagonale. On exprimera les coefficients diagonaux en fonction du polynôme  $P_C$ .

3) Dans cette question, on suppose que  $a_0 = -1$  et  $a_1 = a_2 = 1$  de sorte que

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_C = X^2 + X - 1.$$

a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que  $C$  est inversible et calculer  $C^{-1}$ .

b) Expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points

$$(1, P_C(1)), \quad (j, P_C(j)) \quad \text{et} \quad (j^2, P_C(j^2)).$$

On le notera  $\widehat{P}$ . On le simplifiera au maximum mais sans le factoriser.

c) Déterminer une matrice circulante dont le polynôme associé est  $\widehat{P}$ . Que remarque-t-on ?

### Partie B : Puissances et inversibilité de la matrice $A$

Dans cette partie et les suivantes, tout calcul de produit de matrice doit être montré par calculs algébriques ou avec la formule de la définition du produit. Aucun produit « en papillon » avec des pointillés ne sera accepté pour preuve.

Pour tout  $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , notons  $E_{-j} = E_{n-j}$  pour simplifier les calculs.

1) Montrer que, pour tous  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $ME_j$  est la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $M$ .

2) Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , posons  $H(k)$  : « Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $A^k E_j = E_{j-k}$  ».

Montrer que, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $H(k)$  est vraie.

- 3) Montrer alors que, pour tout  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $A^k = C(0, \dots, 0, \underset{k+1}{1}, 0, \dots, 0)$  et que  $A^n = I$ .
- 4) En déduire que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = A^T$ .

### Partie C : Structure d'anneau de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

- 1) En utilisant la question B3, montrer que,

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k.$$

Autrement dit, si  $C = C(a_0, \dots, a_{n-1})$ , alors  $C = P_C(A)$  où  $P_C$  désigne le polynôme associé à  $C$ .

- 2) Montrer alors que

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

- 3) Montrer que  $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$  est un sous-anneau de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui est commutatif.

### Partie D : Diagonalisation et inversibilité des matrices de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

Notons  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . On définit la matrice  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad (Q)_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}.$$

On note  $\overline{Q}$  la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de  $Q$  par son conjugué.

- 1) Calculer le produit  $Q\overline{Q}$  et en déduire que  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

- 2) On note  $D = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ .

a) Vérifier que  $AQ = QD$ .

b) En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D^k = Q^{-1}A^kQ$ .

- 3) Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ . Notons  $C = C(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $P_C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

a) Montrer que  $Q^{-1}CQ = \text{diag}(P_C(1), P_C(\omega), \dots, P_C(\omega^{n-1}))$ .

b) En déduire que  $C$  est inversible si et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $\omega^k$  n'est pas racine de  $P_C$ .

c) Caractériser enfin  $U(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}))$ , le groupe des inversibles de  $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ .

Comme dans la partie A, on pensera à utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange (sans l'expliciter).