Devoir surveillé n° 7 – Sujet B

samedi 15 mars 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

*Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Apéritif

Factoriser $P = 3X^4 - 11X^3 + 9X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 : Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes... encore une fois

On définit sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction cotangente, notée cotan, par

$$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons

$$x_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

1) Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Écrire le complexe $\sqrt{x_k} + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle. En déduire que $(\sqrt{x_k} + i)^{2n+1}$ est un nombre réel.

2) On définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}.$$

   a) Préciser le degré de P_n, son coefficient dominant et le coefficient d'indice $\deg(P) - 1$.

   b) Montrer que

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}\left((t+\mathrm{i})^{2n+1}\right) = P_n(t^2).$$

   c) Vérifier que $x_1, \ldots, x_n$ sont des racines de P_n.

   d) En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

3) Justifier que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

4) On rappelle que $\tan$ est convexe sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\sin$ est concave sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Montrer alors que

$$\forall u \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \operatorname{cotan}^2(u) \leqslant \frac{1}{u^2} \leqslant 1+\operatorname{cotan}^2(u).$$

5) En déduire que

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant n+\frac{n(2n-1)}{3}.$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3 : Quelques propriétés des matrices circulantes

On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note

$$C(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et on dit que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est son polynôme associé.

On note $\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \{C(a_0,\ldots,a_{n-1})\,|\,(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appelé ensemble des matrices circulantes.

Parmi les matrices circulantes, on note

$$A = C(0,1,0,\ldots,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $(A)_{n,1} = 1$, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $(A)_{k,k+1} = 1$, et les autres coefficients de A sont nuls.

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons E_k la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la $k^{\text{ième}}$ ligne. Remarquons que :

- $C(1,0,0,0,\ldots,0) = \mathrm{I} = (E_1|E_2|\cdots|E_{n-1}|E_n)$
- $C(0,1,0,0,\ldots,0) = A = (E_n|E_1|E_2|\cdots|E_{n-1})$
- $C(0,0,1,0\ldots,0) = (E_{n-1}|E_n|E_1|E_2|\cdots|E_{n-2})$
- etc.

On rappelle que, lorsque $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $P(M)$ désigne la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k M^k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour tous $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\lambda P(M) + \mu Q(M) = (\lambda P + \mu Q)(M) \quad \text{et} \quad P(M)\times Q(M) = (PQ)(M) = Q(M)\times P(M).$$

Partie A : Cas particulier où $n=3$

On suppose dans cette partie uniquement que $n=3$. On a alors $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. On pose $Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&\mathrm{j}&\mathrm{j}^2\\1&\mathrm{j}^2&\mathrm{j}\end{pmatrix}$.
On rappelle que $\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, $\mathrm{j}^3=1$, $\bar{\mathrm{j}}=\mathrm{j}^2$ *et* $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

1) Vérifier que $Q^{-1}=\dfrac{1}{3}\overline{Q}$ où $\overline{Q}$ désigne la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de Q par leur conjugué.

2) On se donne $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{C}^3$. On pose $C=C(a_0,a_1,a_2)$ et on note $P_C=a_0+a_1X+a_2X^2$ son polynôme associé.
   a) Vérifier que $C=P_C(A)$, c'est-à-dire $C(a_0,a_1,a_2)=a_0\mathrm{I}+a_1A+a_2A^2$.
   b) Vérifier par le calcul que $D=Q^{-1}AQ$ est une matrice diagonale.
   c) En déduire que $Q^{-1}CQ$ est aussi une matrice diagonale. On exprimera les coefficients diagonaux en fonction du polynôme P_C.

3) Dans cette question, on suppose que $a_0=-1$ et $a_1=a_2=1$ de sorte que

$$C=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad P_C=X^2+X-1.$$

   a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que C est inversible et calculer C^{-1}.
   b) Expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points $(1,P_C(1))$, $(\mathrm{j},P_C(\mathrm{j}))$ et $\big(\mathrm{j}^2,P_C(\mathrm{j}^2)\big)$. On le notera $\widehat{P}$.
   c) Déterminer une matrice circulante dont le polynôme associé est $\widehat{P}$. Que remarque-t-on ?

Partie B : Puissances et inversibilité de la matrice A

Dans cette partie et les suivantes, tout calcul de produit de matrice doit être montré par calculs algébriques ou avec la formule de la définition du produit. Aucun produit « en papillon » avec des pointillés ne sera accepté pour preuve.

Pour tout $j\in[\![0\,;n-1]\!]$, notons $E_{-j}=E_{n-j}$ pour simplifier les calculs.

1) Montrer que, pour tous $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $j\in[\![1\,;n]\!]$, ME_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.

2) Pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, posons $H(k)$: « Pour tout $j\in[\![1\,;n]\!]$, $A^kE_j=E_{j-k}$ ».
   Montrer que, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$, $H(k)$ est vraie.

3) Montrer alors que, pour tout $k\in[\![1\,;n-1]\!]$, $A^k=C(0,\dots,0,\underset{k+1}{1},0\dots,0)$ et que $A^n=\mathrm{I}$.

4) En déduire que A est inversible et que $A^{-1}=A^T$.

Partie C : Structure d'anneau de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

1) En utilisant la question B3, montrer que, pour tout $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$,

$$C(a_0,\dots,a_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}a_kA^k.$$

   Autrement dit, si $C=C(a_0,\dots,a_{n-1})$, alors $C=P_C(A)$ où P_C désigne le polynôme associé à C.

2) Montrer alors que $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})=\{\,P(A)\mid P\in\mathbb{C}[X]\}$.
   On pensera à utiliser le fait que $A^n=\mathrm{I}$ et le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

3) Montrer que $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est commutatif.

Partie D : Diagonalisation et inversibilité des matrices de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

Notons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$. On définit la matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall (k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2, \qquad (Q)_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}.$$

On note $\overline{Q}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de Q par son conjugué.

1) Calculer le produit $Q\overline{Q}$ et en déduire que $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2) On note $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$.
   a) Vérifier que $AQ = QD$.
   b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = Q^{-1}A^kQ$.

3) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Notons $C = C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $P_C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
   a) Montrer que $Q^{-1}CQ = \mathrm{diag}(P_C(1), P_C(\omega), \ldots, P_C(\omega^{n-1}))$.
   b) En déduire que C est inversible si et seulement si, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, ω^k n'est pas racine de P_C.
   c) Caractériser enfin $U(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}))$, le groupe des inversibles de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$.
   Comme dans la partie A, on pensera à utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange (sans l'expliciter).

Exercice 4 : Inégalité de Bernstein

1) Justifier l'existence du réel $\|P\| = \sup\limits_{u \in \mathbb{U}} |P(u)|$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.
On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1 et que celui-ci se paramètre très bien pour répondre à la question...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leqslant n\|P\|$. Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bernstein.

2) Justifier que $X^n + 1$ admet n racines distinctes que l'on explicitera.

Dans la suite on note $z_1, \ldots, z_n$ les n racines de $X^n + 1$. Leurs valeurs exactes ne nous serviront pas.

3) Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Notons $F_k = \dfrac{X^k}{X^n+1}$.
   a) Décomposer F_k en éléments simples.
   b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $F_k'(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{z_i^{k+1}}{(x-z_i)^2}$.
   c) Conclure que $k = \dfrac{n}{2} + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{z_i^{k+1}}{(1-z_i)^2}$.

4) Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \qquad XP' = \frac{n}{2}P + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{(1-z_i)^2} P(z_i X).$$

On commencera par prouver cette formule pour $P = X^k$, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$.

5) a) Justifier que, pour tout $u \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, $\dfrac{u}{(1-u)^2}$ est un réel négatif.
   b) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|}{|1-z_i|^2} = \frac{n^2}{4}.$$

   c) Montrer enfin l'inégalité de Bernstein : pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leqslant n\|P\|$.
   d) Montrer que cette inégalité peut être une égalité dans certains cas.
   Ainsi cette inégalité est optimale.