Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7 – Sujet A

samedi 15 mars 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Matrices en vrac

1) Montrer que
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
est inversible et calculer A^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss[1].
On présentera A^{-1} sous la forme $\frac{1}{q}B$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et B est une matrice à coefficients entiers.

2) Notons
$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   a) Déterminer $a \in \mathbb{Z}$ tel que $B^2 = aB - 2\mathrm{I}_3$
   b) En déduire que B est inversible et expliciter B.
   On n'utilisera pas la méthode du pivot de Gauss à cette question.

3) Notons
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
   a) Posons $N = M - \mathrm{I}_3$. Calculer N^2 et obtenir que $N^3 = 0_3$.
   b) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.
   On pourra s'arrêter en donnant le résultat sous la forme d'une combinaison linéaire de trois matrices.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $A = (i^2 + j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (6ij)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la matrice AB pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.

5) **Question de cours.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4, \qquad E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell},$$
où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et 0 si $j \neq k$.

1. La méthode du pivot de Gauss devra être respectée à la lettre. Aucune interversion de lignes ne doit avoir lieu si le pivot est non nul. Aucune fraction ne doit apparaître dans les calculs sauf éventuellement à l'ultime étape.

Exercice 2 : Polynômes en vrac

1) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $(X+2)^{2025}-(X-2)^{2025}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $(X+1)^2$.

3) Résoudre l'équation $(X^2+1)P'' = 6P$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
On s'intéressera aux coefficients dominants.

4) Factoriser $3X^4 - 11X^3 + 9X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

5) Factoriser $X^4 - 6X^2 + 25$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

6) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Factoriser $X^6 + a^6$ dans $\mathbb{C}[X]$ d'abord, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que
$$P(3) = P'(3) = P(1) = 0, \qquad P(2) = -2, \qquad P(4) = 20.$$
On l'écrira sous forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$.

8) Soient P et Q deux polynômes tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) = Q\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$
Justifier que $P = Q$.

9) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points $(-1,-4)$, $(2,5)$ et $(3,12)$.
On présentera la réponse sous forme factorisée au maximum bien sûr.

10) Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $p \in [\![0\,;n-1]\!]$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^p}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

11) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de coefficient constant non nul. Notons $a_1, \dots, a_n$ ses racines complexes distinctes et $m_1, \dots, m_n$ leurs ordres de multiplicité respectives. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{a_k}$ en fonction des polynômes P et P' exclusivement.

Exercice 3 : Quelques propriétés des matrices circulantes d'ordre 3

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on note
$$C(a,b,c) = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{C}_3(\mathbb{C}) = \{C(a,b,c) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appelé ensemble des matrices circulantes.

Parmi les matrices circulantes, on note
$$A = C(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Remarquons que $C(0,0,1) = \mathrm{I}_3$.

1) Montrer que $\mathcal{C}_3(\mathbb{C})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il est commutatif.

2) a) Calculer A^2 et A^3.
   b) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = A^T$.
   c) En déduire aussi que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $C(a,b,c) = aA^2 + bA + c\mathrm{I}_3$.

3) On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que $Q^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{Q}$ où $\overline{Q}$ désigne la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de Q par leur conjugué.
   On rappelle que $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, $\mathrm{j}^3 = 1$, $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$ *et* $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

   b) On pose $D = Q^{-1}AQ$. Vérifier par le calcul que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Notons $C = C(a, b, c)$.

   a) Déduire des questions précédentes que $Q^{-1}CQ = aD^2 + bD + c\mathrm{I}_3$.

   b) Conclure que C est inversible si et seulement si 1, j et j^2 ne sont pas racines du polynôme $P = aX^2 + bX + c$.

   c) On suppose que cette dernière condition est vérifiée. Justifier qu'il existe un unique polynôme $\widehat{P} \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que

$$\widehat{P}(1) = \frac{1}{P(1)}, \qquad \widehat{P}(\mathrm{j}) = \frac{1}{P(\mathrm{j})} \qquad \text{et} \qquad \widehat{P}(\mathrm{j}^2) = \frac{1}{P(\mathrm{j}^2)}.$$

   On ne cherchera à expliciter le polynôme $\widehat{P}$.

   d) On note $\widehat{P} = \widehat{a}X^2 + \widehat{b}X + \widehat{c}$ puis $\widehat{C} = C(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c})$. Montrer que $\widehat{C}$ est l'inverse de C.
   On pensera à utiliser la question 4a.

5) Conclure en caractérisant le groupe des inversibles de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$.