Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6

samedi 8 février 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Questions en vrac

Cet exercice devra être traité sur une copie séparée. Il ne pourra être traité que lors des deux premières heures de ce devoir. Les copies seront ensuite ramassées et les deux dernières heures devront être consacrées exclusivement au problème. Il est tout à fait possible de commencer à traiter le problème avant la fin des deux premières heures.

Le temps conseillé pour chaque question est indiqué au début de celle-ci.

1) ***(12 min.)*** Montrer que $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x^{\frac{3}{2}} \ln(x))$ est prolongeable par continuité en 0 et que, ainsi prolongée, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) ***(8 min.)*** Justifier que la fonction $g : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\right)$ n'a pas de limite en 0^+.
3) Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-\frac{u_n^2}{2}}$.
   a) ***(15 min.)*** Justifier que $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ - Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   b) ***(15 min.)*** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\alpha \in \left]0\,;1\right[$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
   Toute récurrence devra être intégralement rédigée.
   c) ***(5 min.)*** On suppose que $u_0 \in \left]0\,;1\right[$. Déterminer alors un entier n_0 tel que u_{n_0} est une approximation de α à 10^{-5} près.
   On pourra utiliser le fait que $\ln(2) < 0,7$ *et* $\ln(5) < 1,61$.
4) ***(15 min.)*** Montrer que $\mathscr{A} = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(0) = 0\}$ est un sous-anneau de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \times)$.
5) a) ***(5 min.)*** Étudier la convexité/concavité de $h : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $\mathbb{R}$. Préciser si elle admet un point d'inflexion.
   b) ***(10 min.)*** Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels supérieurs ou égaux à 1. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}.$$
6) ***(15 min.)*** Soit $f : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $[-1\,;1]$ telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que f'' s'annule sur $\left]-1\,;1\right[$.

Soit I un intervalle non vide et non réduit à point. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On introduit :

- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_t : x \in I \longmapsto tx - f(x)$,
- $I^* = \{t \in \mathbb{R} \,|\, F_t \text{ est majorée sur } I\}$.

Lorsque $I^* \neq \varnothing$, on définit la fonction

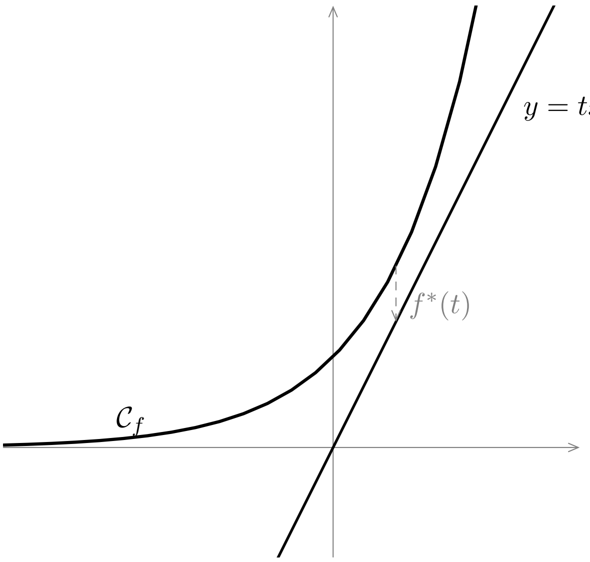
$$f^* : \left\{ \begin{array}{ccc} I^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sup\limits_{x \in I} F_t(x) \end{array} \right.$$

Autrement dit :

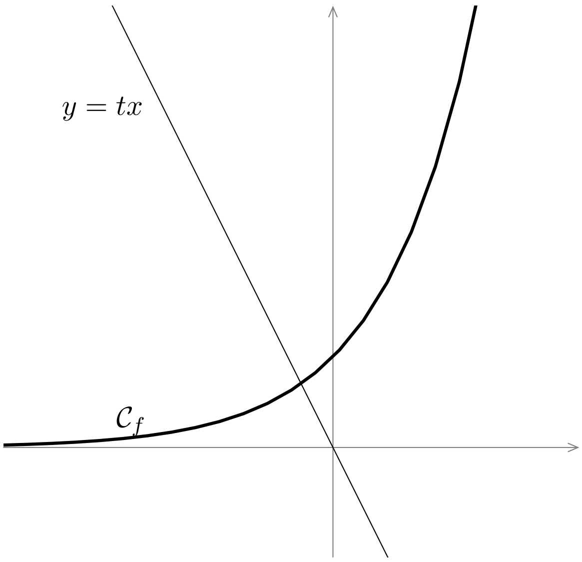
$$\forall t \in I^*, \qquad f^*(t) = \sup_{x \in I} \big(tx - f(x)\big).$$

La fonction f^* est appelée *conjuguée de Fenchel-Legendre* de f (sur I). Son domaine de définition est I^*.

Graphiquement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on trace sur le même dessin les graphes de f et de $x \longmapsto tx$:



$t \in I^*$



$t \notin I^*$

Alors $t \in I^*$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto tx - f(x)$ est majorée et, dans ce cas, $f^*(t)$ est « l'écart maximal » (ou plutôt la borne supérieure des écarts, puisqu'il n'y a pas forcément de maximum). Ci-dessus, à gauche, une valeur de t qui appartient à I^* et on a indiqué $f^*(t)$ sur le graphe (en pointillés, flèche vers le bas[1] car $f^*(t) < 0$), et à droite, une valeur de t qui n'appartient pas à I^* puisque $tx - f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.

La conjuguée de Fenchel-Legendre possède de nombreuses applications dans diverses branches des mathématiques. On se propose dans ce problème d'en étudier plusieurs propriétés. La partie A consiste en l'étude de plusieurs exemples explicites (avec des méthodes différentes). Dans la partie B, on étudie plusieurs propriétés générales de I^* et f^*. On s'interesse ensuite au cas particulier où f est convexe, dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ et f' strictement croissante (dans la partie C) puis dans le cas général (dans la partie D). La partie E est consacrée à la biconjugaison et la partie F à une application « probabiliste ».

Les parties A, B, C, D et F sont indépendantes (sauf la dernière question de la partie C qui utilise des résultats de la partie B et la dernière question de la partie F qui utilise des résultats de la partie C). La partie E utilise des résultats des parties C et D.

1. Attention, c'est « l'écart maximal » (au sens d'une borne supérieure, encore une fois) et non pas la distance entre les deux graphes puisque cet écart peut être négatif.

Partie A : Exemples

1) On suppose dans cette question que $I=\mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$.
   a) Soit $(t,x)\in\mathbb{R}^2$. Écrire $F_t(x)$ sous forme canonique.
   b) En déduire que $I^*=\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, F_t est majorée sur $\mathbb{R}$) et calculer f^*.

2) On suppose dans cette question que $I=\mathbb{R}$ et $f=\exp$.
   a) Dresser le tableau de variations de la fonction F_t dans le cas où $t\in\mathbb{R}_+^*$ puis dans le cas où $t\in\mathbb{R}_-^*$.
   b) Conclure que $I^*=\mathbb{R}_+$ et exprimer f^* sur $\mathbb{R}_+$.

3) On suppose dans cette question que $I=\mathbb{R}_+^*$ et $f : x\longmapsto x(\ln(x)-1)$. En adoptant la même démarche que dans la question précédente, déterminer I^* et f^*. Que remarque-t-on ?

4) Montrer que, si $I=\mathbb{R}$ et f est la valeur absolue, alors $I^*=[-1\,;1]$ et f^* est la fonction nulle.
   On ne fera pas d'étude de fonction à cette question.

5) On se donne $p\in\,]1\,;+\infty[$. On suppose[1] dans cette question que $I=\mathbb{R}$ et $f : x\longmapsto \dfrac{|x|^p}{p}$.
   a) Justifier qu'il existe $q\in\,]1\,;+\infty[$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ puis, en utilisant la concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer l'inégalité de Young :
   $$\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2,\qquad ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$
   b) En déduire que $I^*=\mathbb{R}$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f^*(t)\leqslant \dfrac{|t|^q}{q}$.
   c) Soit $t\in\mathbb{R}$. à l'aide d'un choix judicieux de x (différent selon que $t\in\mathbb{R}_+$ ou $t\in\mathbb{R}_-^*$), montrer que l'inégalité de la question précédente est une égalité.

   On en déduit que $f^* : t\longmapsto \dfrac{|t|^q}{q}$. Il s'agit donc d'une généralisation de la question A1.

Partie B : Quelques résultats généraux

On revient au cas général.

1) Justifier que, si f est minorée sur I, alors $0\in I^*$ (et donc $I^*\neq\varnothing$).

On suppose dans la suite de cette partie que $I^*\neq\varnothing$.

2) Justifier que
$$\forall (x,t)\in I\times I^*,\quad tx\leqslant f(x)+f^*(t).$$

3) a) Soient s et t dans I^* tels que $s\leqslant t$. Montrer que, pour tout $u\in[s\,;t]$, $u\in I^*$.
   b) En déduire que I^* est un intervalle.

4) a) Soient $\lambda\in[0\,;1]$ et $(t,s)\in(I^*)^2$. Montrer que
   $$\forall x\in I,\qquad ((1-\lambda)t+\lambda s)x-f(x)\leqslant (1-\lambda)f^*(t)+\lambda f^*(s).$$
   b) En déduire que f^* est convexe sur I^*.

5) Supposons dans cette question que I est un segment et que f est continue sur I.
   a) Justifier que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t\in I^*$ et il existe $x_t\in I$ tel que $f^*(t)=tx_t-f(x_t)$.
   b) Soient t et s dans I^* (il s'agit de $\mathbb{R}$ d'après la question précédente). Justifier que
   $$f^*(t)-f^*(s)\geqslant (t-s)x_s.$$

   On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que $f^*(s)-f^*(t)\geqslant (s-t)x_t$.

   c) Notons K un réel positif tel que $I\subset[-K\,;K]$. Justifier l'existence de K puis, à l'aide de la question précédente, conclure que f^* est K-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

1. On rappelle que $0^\alpha=0$ lorsque $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

Partie C : Le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$ et f' strictement croissante

Dans cette partie, on suppose que I est ouvert, que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que f' est strictement croissante sur I (et donc f est convexe sur I). Toutefois, on ne suppose pas que f est deux fois dérivable sur I.

1) Justifier que f' réalise une bijection de I sur un intervalle J.

On introduit alors

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ t & \longmapsto & (f')^{-1}(t) \end{array} \right.$$

2) Soit $t \in J$. À l'aide de l'étude de la fonction F_t, montrer $t \in I^*$ et que

$$f^*(t) = tg(t) - f(g(t)).$$

3) Supposons de plus que f est deux fois dérivable et $f'' > 0$ sur I. En déduire que f^* est dérivable sur J et que $(f^*)' = g$ sur J. Retrouver le fait que f^* est convexe sur J.

4) Dans cette question, on s'interesse au cas particulier où $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

   a) Exprimer f^* sur J dans ce cas particulier.
   Il est demandé dans cette question de n'utiliser que la formule de la question C2 et aucune étude de fonctions.

   b) En utilisant des résultats de la partie B, justifier que $[0\,;1[\subset I^*$.
   On ne fera ni étude de fonction, ni majoration.

   On voit donc sur cet exemple que I^* peut être beaucoup plus gros que J.

Partie D : Le cas où f est convexe

Dans cette partie, on suppose que I est ouvert et que f est convexe sur I. On ne suppose plus que f est dérivable.

1) Commençons par montrer quelques résultats généraux sur les fonctions convexes avant de revenir à notre problème. Soit $x \in I$. On pose

$$\tau_x : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{x\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array} \right.$$

   a) Justifier l'existence de $(a, b) \in I^2$ tels que $a < x < b$.

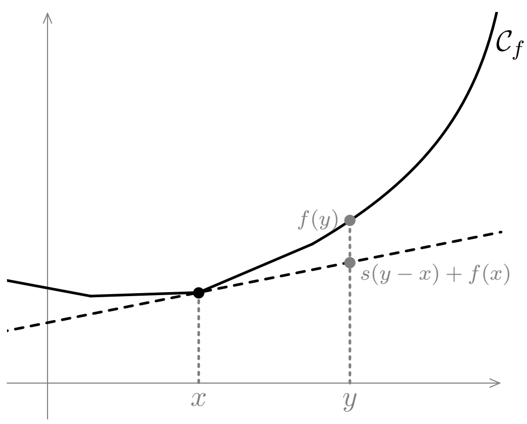
   b) Montrer que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x. On les note $f_g'(x)$ et $f_d'(x)$ respectivement.

   c) En déduire que f est continue en x.

   d) Justifier que, pour tout $z \in I \cap \,]x\,;+\infty[$, $f_g'(x) \leqslant \tau_x(z)$.

   e) En déduire que, pour tout $(y, z) \in I^2$ tel que $y < x < z$,

$$\tau_x(y) \leqslant f_g'(x) \leqslant f_d'(x) \leqslant \tau_x(z).$$



2) Soit $x \in I$. On se donne $s \in \left[f_g'(x)\,; f_d'(x)\right]$.

   a) Déduire de la question précédente que

$$\forall y \in I, \qquad f(y) \geqslant s(y - x) + f(x).$$

   On distinguera les cas selon que $y > x$, $y < x$ ou $y = x$.

   b) Conclure que $s \in I^*$ et que $f^*(s) = sx - f(x)$.

Partie E : Biconjugaison

On suppose que $I^* \neq \varnothing$. On définit alors $I^{**} = \{y \in \mathbb{R} \,|\, t \mapsto yt - f^*(t)$ est majorée sur $I^*\}$ et, si ce dernier est non vide, on pose $f^{**} : y \longmapsto \sup\limits_{t \in I^*} \big(yt - f^*(t)\big)$.

Autrement dit f^{**} est la transformée de Fenchel-Legendre de f^*.

1) Expliquer pourquoi il faut que f soit convexe pour que $f^{**} = f$.

2) Commençons par nous placer dans le cadre de la partie D (c'est-à-dire I ouvert, f deux fois dérivable et f'' strictement positive sur I). Soit $x \in I$. En étudiant la fonction $G_x : t \in J \longmapsto xt - f^*(t)$, montrer que $x \in I^{**}$ et $f^{**}(x) = f(x)$.

3) Dans cette question, on suppose que I est ouvert et que f est convexe sur I mais pas forcément dérivable.
   a) En utilisant la question B2, montrer que $I \subset I^{**}$ et que, pour tout $x \in I$, $f^{**}(x) \leqslant f(x)$.
   b) Supposons que I est ouvert et que f est convexe. En utilisant la question D2b, montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f^{**}(x)$.

   On en déduit que $f = f^{**}$ sur I lorsque I est ouvert et f est convexe sur I.

Partie F : Transformée de Cramér

Voyons maintenant une application probabiliste [1]. On se donne :

- un ensemble fini K,
- une famille $(a_k)_{k \in K}$ de réels distincts indexée par K. On note α et β le minimum et le maximum (respectivement) de la famille $(a_k)_{k \in K}$.
- une famille $(\lambda_k)_{k \in K}$ de réels strictement positifs indexée par K. Notons $S = \sum\limits_{k \in K} \lambda_k$.

Pour tout $t \in [\alpha\,;\beta]$, on note $K_t = \{k \in K \,|\, a_k \geqslant t\}$ et $P(t) = \sum\limits_{k \in K_t} \lambda_k$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction L par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad L(x) = \ln\left(\sum_{k \in K} \lambda_k \mathrm{e}^{x a_k}\right).$$

On note L^* le conjugué de Fenchel-Legendre de L (le supremum dans la définition étant pris sur $\mathbb{R}_+$) et I^* son domaine de définition [2].

1) Soit $t \in [\alpha\,;\beta]$.
   a) Justifier que $P(t) > 0$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{L(x)} \geqslant \mathrm{e}^{tx} P(t)$.
      On pensera à couper la somme définissant $\mathrm{e}^{L(x)}$ *en deux sommes.*
   c) Montrer alors que $t \in I^*$ et $L^*(t) \leqslant -\ln(P(t))$.

   On en déduit que, pour tout $t \in [\alpha\,;\beta]$, $P(t) \leqslant \mathrm{e}^{-L^*(t)}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On suppose dans cette question que $K = [\![0\,;n]\!]$ et que, pour tout $k \in K$, $a_k = k$, et $\lambda_k = \dbinom{n}{k}$.
   a) Calculer L sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Conclure [3] que, pour tout $a \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n}{2} < a < n-1$,

$$\sum_{k=a}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^n}{a^a (n-a)^{n-a}}.$$

      On pensera à utiliser la question C4.

---

1. Rassurez-vous : il n'y a rien à savoir sur les probabilités pour réussir cette partie : les probabilités sont « cachées ».
2. C'est-à-dire l'ensemble des réels t tels que $x \mapsto tx - L(x)$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.
3. Interprétation probabiliste : si on divise cette inégalité par 2^n, on obtient une majoration de la probabilité d'obtenir plus de a Piles lorsque l'on lance n pièces de monnaies (indépendamment). Ce type d'inégalité est appelée *inégalité de concentration*. Elles sont très utiles en statistiques et sont aussi à la base d'une théorie probabiliste passionnante appelée *grandes déviations*.