Devoir surveillé n° 5 – Sujet A

samedi 17 janvier 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Décrire $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0\}))$ par extension.

2) Montrer $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[2025-n\,;2026-\frac{1}{n}\right]=\,]-\infty\,;2026[$.

3) Posons $f : x\in\mathbb{R}^*\longmapsto\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$. Déterminer $f(]0\,;1[)$ et $f^{-1}(\{0\})$.
On ne fera pas d'étude de fonctions.

4) Soit E un ensemble qui n'est ni vide ni un singleton. Soit A une partie non vide de E qui n'est pas E. On pose

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(\overline{A})\\ X & \longmapsto & (X\cap A, X\cap\overline{A})\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad g:\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(\overline{A}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E)\\ (X,Y) & \longmapsto & X\cup Y\end{array}\right.$$

Montrer que f est g sont des bijections qui sont réciproques l'une de l'autre.

5) Soient E et F des ensembles non vides. Soit $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow E$ tels que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$. Montrer que g est surjective et que f est injective.

6) Soient E et F deux ensembles non vides. Soit $f : E\longrightarrow F$.
   a) Soit $B\in\mathscr{P}(F)$. Montrer que $f^{-1}(F\backslash B)=E\backslash f^{-1}(B)$.
   b) Supposons que f est surjective. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. Montrer que $F\backslash f(A)\subset f(E\backslash A)$.
   c) Supposons que, pour tout $A\in\mathscr{P}(E)$, $F\backslash f(A)\subset f(E\backslash A)$. Montrer que f est surjective.
   d) Supposons que f est injective. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)$.
   e) Supposons que, pour tout $A\in\mathscr{P}(E)$, $f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)$. Montrer que f est injective.

7) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ une relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad x\preccurlyeq y\quad\Longleftrightarrow\quad f(y)-f(x)\geqslant|y-x|.$$

   a) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
   b) Qu'est ce que $\preccurlyeq$ lorsque $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$?
   c) Donner un exemple de f telle que $\preccurlyeq$ n'est pas un ordre total sur $\mathbb{R}$.

8) Notons $\Omega = (\mathbb{N}\times\{0\})\cup(\mathbb{N}\times\{1\})$. On définit sur Ω une relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall((n,i),(p,j))\in\Omega^2, \qquad (n,i)\preccurlyeq(p,j) \quad\Longleftrightarrow\quad i<j \text{ ou } (i=j \text{ et } n\leqslant p).$$

   a) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur Ω.

   b) Justifier que toute partie non vide de Ω admet un minimum pour $\preccurlyeq$.

   c) Montrer que $\mathbb{N}\times\{0\}$ admet une borne supérieure que l'on explicitera. Est-ce le maximum ?

9) Soit E un ensemble. Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{X\in\mathscr{A}} X$ est la borne inférieure de $\mathscr{A}$.

10) On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\approx$ par

$$\forall((x_1,y_1),(x_2,y_2))\in(\mathbb{R}^2)^2, \qquad (x_1,y_1)\approx(x_2,y_2) \quad\Longleftrightarrow\quad \exists(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x_2=ax_1 \text{ et } y_2=by_1.$$

Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence.

   a) Montrer que $\approx$ est une relation d'équivalence.

   b) Décrire les classes d'équivalences pour la relation $\approx$.
   On pourra commencer par déterminer la classe d'équivalence de $(0,0)$, celle de $(1,2)$ et celle de $(0,1)$ et on finira par remarquer qu'il y en a 9 classes d'équivalence en tout et on les listera (quelques explications suffiront).

11) Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité et on pose $\Delta_n=\mathbb{U}_n\times\{-1;1\}$. On définit sur Δ_n une loi $\otimes$ par :

$$\forall((x,a),(y,b))\in\Delta_n^2, \qquad (x,a)\otimes(y,b)=(x\times y^a, a\times b).$$

   a) Montrer que $(\Delta_n,\otimes)$ est un groupe.

   b) Montrer que, si $n\geqslant 3$, $(\Delta_n,\otimes)$ n'est pas abélien. Et si $n=2$?

12) Montrer que $A=\left\{\dfrac{2p+1}{2q+1}\;\middle|\;(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.

13) Montrer que $f : z\longmapsto \dfrac{z}{|z|}$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{C}^*$ dans lui même. Déterminer son noyau et son image.

14) On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la somme et du produit, est un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble A des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une limite finie en $+\infty$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Est-il intègre ?

15) Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Soit a un élément inversible de A. Montrer que $f : x\longmapsto axa^{-1}$ est un isomorphisme d'anneaux de A dans lui-même. On précisera l'isomorphisme réciproque.

16) On rappelle que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\times)$ est un anneau. Déterminer ses diviseurs de zéro.

17) On note $\mathbb{Q}(\mathrm{i})=\{a+\mathrm{i}\,b\,|\,(a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$.

   a) Montrer que $(\mathbb{Q}(\mathrm{i}),+,\times)$ est un corps.

   b) Montrer que $h : z\longmapsto\overline{z}$ est un automorphisme de corps de $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ (c'est-à-dire un isomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ dans lui-même).

   c) On se donne maintenant un morphisme d'anneaux f de $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ dans lui-même. Justifier que $f(\mathrm{i})=\pm\mathrm{i}$.

   d) Justifier que, pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}$.
   On commencera donner la valeur de $f(n)$ en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

   e) En déduire qu'il existe deux morphismes d'anneaux de $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ dans lui-même (que l'on explicitera) et que ce sont des automorphismes.

18) On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois de composition internes $\$$ et $\top$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad x\$y=x+y-1 \qquad\text{et}\qquad x\top y=2-x-y+xy.$$

Montrer que $(\mathbb{R},\$,\top)$ est un corps.