Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 5

samedi 18 janvier 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soient E et F des ensembles non vides. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ tels que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que g est surjective et que f est injective.

2) Soient $f : E \longrightarrow F$ injective. Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$ telles que $f(A) = f(B)$. Montrer que $A = B$.

3) Considérons $\mathcal{A} = \left\{ [-n\,;\mathrm{e}^{-n}] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
   a) Montrer que $\mathcal{A}$ admet $]-\infty\,;1]$ pour borne supérieure (pour l'inclusion).
   b) Déterminer la borne inférieure de $\mathcal{A}$ (pour l'inclusion)..
   c) Est-ce que ce sont le minimum et le maximum respectivement ?

4) On munit l'ensemble $G =]-1\,;1[$ de la loi $\oplus$ définie par :

$$\forall (a,b) \in G^2, \qquad a \oplus b = \frac{a+b}{ab+1}.$$

   Montrer que $(G, \oplus)$ est un groupe abélien.

Exercice 2 : Étude d'une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\preccurlyeq$ par

$$\forall ((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2, \qquad (x,y) \preccurlyeq (x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad |x'-x| \leqslant y'-y.$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

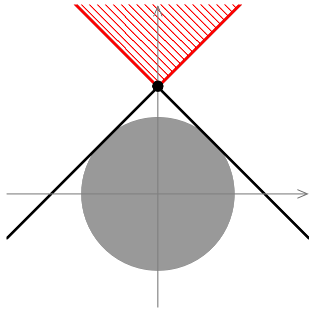
2) Est-ce que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale ?

3) On note $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. Le but de cette question est de déterminer la borne supérieure de $\mathcal{D}$ pour la relation $\preccurlyeq$.
   a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que (x,y) est un majorant de $\mathcal{D}$ si et seulement si

$$\forall (a,b) \in Dc^2, \qquad y \geqslant x + b - a \quad \text{et} \quad y \geqslant -x + b + a.$$

   b) En déduire que, si (x,y) est un majorant de $\mathcal{D}$, alors $y \geqslant x + \sqrt{2}$ et $y \geqslant -x + \sqrt{2}$.
   c) Montrer que, si $y \geqslant x + \sqrt{2}$ et $y \geqslant -x + \sqrt{2}$, alors (x,y) est un majorant de $\mathcal{D}$.

On vient donc de montrer que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x+\sqrt{2} \text{ et } y \geqslant -x+\sqrt{2}\}$ est l'ensemble des majorants de $\mathcal{D}$. Il s'agit de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont au dessus des droites d'équation $y = x+\sqrt{2}$ et $y = -x+\sqrt{2}$ (l'ensemble hachuré sur le dessin ci-contre).



d) En déduire que $\mathcal{D}$ admet une borne supérieure que l'on explicitera. Est-ce le maximum de $\mathcal{D}$?
On s'aidera bien sûr du dessin pour conjecturer la borne supérieure.

Exercice 3 : Lemme de Dedekind et théorème de Cantor Bernstein

Partie A : Lemme de Dedekind

Soit E un ensemble non vide. Soit A une partie non vide de E. On suppose qu'il existe une injection f de E sur A. L'objectif de cette partie est de montrer qu'il existe une bijection de E sur A. Ce résultat est appelé lemme de Dedekind.

1) Traiter le cas où f est surjective et le cas où $A = E$.

Supposons dans la suite que f n'est pas une surjection de E sur A et que $A \neq E$.

On définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E par $B_0 = E\backslash A$ (qui est donc non vide par hypothèse) puis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $B_{n+1} = f(B_n)$. Posons alors

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

Introduisons enfin la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} f(x) & \text{si} & x\in B \\ x & \text{si} & x\notin B \end{array} \right. \end{array} \right.$$

2) a) Justifier que φ est bien à valeurs dans A.
   b) Montrer que B est stable par φ
   c) Montrer que $A\cap B \subset f(B)$.

3) a) Montrer que, pour tout $(x,y)\in E^2$, si $x\in B$ et $y\notin B$, alors $\varphi(x)\neq\varphi(y)$.
   b) Montrer alors que φ est injective sur E.

4) Montrer que φ est bijective de E sur A.

5) **Application.** Intéressons-nous à un exemple. Dans cette question uniquement, on suppose que $E = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $f : n \longmapsto n+4$. Expliciter alors la fonction φ.
On ne demande pas de justifier que f est injective de $\mathbb{N}$ sur A (c'est immédiat).

6) **Application.**
   a) Proposer (sans démonstration) une bijection u de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$.
   b) Montrer que l'application

$$v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p(2q+1)-1 \end{array} \right.$$

   est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.
   c) Construire une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.
   d) En déduire que $\mathbb{Q}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Partie B : Théorème de Cantor Bernstein

Soient E et F deux ensembles non vides. Supposons [1] qu'il existe u une injection de E dans F et v une injection de F dans E.

1) En utilisant le lemme de Dedekind, montrer qu'il existe une bijection φ de E sur $v(F)$.

2) En déduire qu'il existe une bijection de E sur F. Ce résultat s'appelle le théorème de Cantor Bernstein [2].

3) On suppose qu'il existe une surjection [3] w de E sur F. Montrer qu'il existe alors une injection de F dans E. Le théorème de Bernstein entraîne alors qu'il existe encore une bijection de E sur F.

Exercice 4 : Quelques résultats sur les groupes finis

Avant de commencer, rappelons que le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé son cardinal et noté $\text{card}(E)$. *On admet les résultats suivants qui sont totalement intuitifs [4] (et que l'on pourra donc utiliser librement dans cet exercice) :*

- *Si $A \subset E$, alors A est fini et $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.*
- *Si $A \subset E$ et $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, alors $A = E$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des parties de E qui sont deux à deux disjointes, alors*

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k).$$

- *S'il existe une bijection de E sur F, alors F est fini et $\text{card}(F) = \text{card}(E)$.*

Dans tout cet exercice, G désigne un groupe fini (non forcément abélien) dont la loi est notée multiplicativement et le neutre est noté e.

Partie A : Le théorème de Lagrange

Soit H un sous-groupe de G. Pour tout $x \in G$, on note $Hx = \{hx \,|\, h \in H\}$.

On définit sur G une relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall (x,y) \in G^2, \qquad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad xy^{-1} \in H.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Montrer que, pour tout $x \in G$, la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$ est $\text{cl}(x) = Hx$.

3) Soit $x \in G$. Montrer que l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \text{cl}(x) \\ h & \longmapsto & hx \end{array} \right.$$

est une bijection. Est-ce un morphisme de groupes ?

4) Notons R_{ep} un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Déduire des résultats rappelés en préambule que $\text{card}(G) = \text{card}(R) \times \text{card}(H)$.

Il s'ensuit que $\text{card}(H)$ divise $\text{card}(G)$. Ce résultat est appelé théorème de Lagrange.

5) **Une première application.** Montrer que, si $\text{card}(G)$ est premier, alors G n'admet que $\{e\}$ et G pour sous-groupes.

1. Dans cette partie u et v ne désignent pas les fonctions de la question qui précède mais des injections quelconques.
2. Que l'on vient de démontrer autrement que dans le DM n° 9.
3. Et qu'il existe toujours l'injection u de E sur F.
4. Ils ont été montrés en annexe du chapitre 15 et nous en reparlerons dans le chapitre 30.

Partie B : Ordre d'un élément d'un groupe

On se donne $x \in G$.

1) Notons $\langle x\rangle = \{x^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe abélien de G.

2) a) Justifier qu'il existe $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \neq \ell$ et $x^k = x^\ell$.

   b) En déduire que $\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, x^n = e\}$ admet un plus petit élément. On le note $\omega(x)$ et on l'appelle l'ordre de x.

   c) Justifier que e est le seul élément d'ordre 1.

   Ainsi, pour tout $x \in G\backslash\{e\}$, $\omega(x) \geqslant 2$ et, par définition, $x^{\omega(x)} = e$ et $x^k \neq e$ pour tout $k \in [\![1\,;\omega(x)-1]\!]$.

   d) À l'aide du théorème de division euclidienne par $\omega(x)$, montrer que :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n = e$ si et seulement si $\omega(x)|n$.
   - $\langle x\rangle = \left\{x^r \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant \omega(x)-1\right\}$.

3) En déduire que $\langle x\rangle$ est de cardinal $\omega(x)$.

4) Conclure que $\omega(x)|\operatorname{card}(G)$.

Partie C : Classification des groupes de cardinal premier

Supposons dans cette partie que $p = \operatorname{card}(G)$ est premier. Donnons-nous $x \in G\backslash\{e\}$ quelconque.

1) Justifier que $G = \langle x\rangle$.

2) On a donc $p = \omega(x)$. Montrer que

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_p & \longrightarrow & G \\ \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p}} & \longmapsto & x^k \end{array}\right.$$

   est un isomorphisme de $\mathbb{U}_p$ dans G.
   Sous-entendu dans l'écriture ci-dessus : $k \in \mathbb{Z}$. On commencera par justifier que l'image d'un élément de $\mathbb{U}_p$ ne dépend pas l'argument choisi dans son écriture exponentielle (et donc du choix de k).

Nous venons de montrer qu'il existe un unique groupe de cardinal p, à isomorphisme près.

Partie D : Classification des groupes de cardinal 4

Supposons dans cette partie que $\operatorname{card}(G) = 4$.

1) Construire sans démonstration les tables de loi des groupes $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2^2$.

2) Justifier que tout élément de G qui n'est pas e est d'ordre 2 ou d'ordre 4.

3) Supposons qu'il existe un élément d'ordre 4. Montrer alors brièvement que G est isomorphe à $\mathbb{U}_4$.

4) Supposons dans la suite que tous les éléments de $G\backslash\{e\}$ sont d'ordre 2. Donnons-nous deux éléments a et b de G qui ne sont pas e.

   a) Montrer que $ab \neq a$, $ab \neq b$ et $ab \neq e$.

   b) Montrer que $ab = ba$.

   Il s'ensuit que $G = \{e; a; b; ab\}$.

   c) Construire alors la table de la loi de G (en justifiant les calculs).

   d) On définit alors la fonction g de $\mathbb{U}_2^2$ dans G par $g((1,1)) = e$, $g((-1,1)) = a$, $g((1,-1)) = b$ et $g((-1,-1)) = ab$. Vérifier que g est un isomorphisme.

   Nous venons de montrer qu'il existe deux groupes de cardinal 4, à isomorphisme près ($\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2^2$). On en déduit aussi qu'un groupe d'ordre 4 est forcément abélien.