Devoir surveillé n° 3

samedi 23 novembre 2024

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut.*

À l'exception de question 3 de l'exercice 1, l'usage des symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$, ainsi que de l'abréviation *ssi*, est totalement interdit dans ce devoir !

(ce qui n'exclut pas d'utiliser des connecteurs logiques).

Les résultats suivants pourront être utilisés dans ce devoir librement sans être redémontrés :

- **Somme[1] des premiers cubes.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- **Propriété[2] de croissance des intégrales sur un segment.** Soient a et b sont des réels tels que $\underline{a \leqslant b}$. Soient φ et ψ deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et telles que $\varphi \leqslant \psi$ sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **Inégalité triangulaire[2] pour les intégrales sur un segment.** Sous les mêmes hypothèses, on a :

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Cette somme a été vue en cours mais n'est pas officiellement au programme.
2. Ces propriétés sont au programme de première année et nous les verrons proprement dans le chapitre 24. Nous les avons toutefois démontrées dans le DM n° 6 en utilisant le théorème fondamental de l'analyse.

Cet exercice devra être traité sur une copie séparée. Il ne pourra être traité que lors des 90 premières minutes de ce devoir. Les copies seront ensuite ramassées et les 150 dernières minutes devront être consacrées exclusivement aux exercices 2 et 3. Il est tout à fait possible de commencer à traiter les exercices 2 et 3 avant la fin des 90 premières minutes.

Temps conseillé pour les questions de cet exercice : 10 min, 10 min, 15 min, 20 min, 10 min, 25 min

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{k(-1)^k}{2^k}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme
$$T_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2}.$$
Le résultat devra être écrit sous la forme $\frac{1}{a}P(n)$ avec a un entier naturel non nul et P une fonction polynomiale à coefficients entiers, factorisée au maximum.

3) Résoudre le système suivant, d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$(S) \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ -3x + y - 4z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$
La méthode du pivot de Gauss devra être utilisée et respectée totalement, y compris dans l'étape de remontée. Aucun échange de ligne n'est autorisé sauf si le pivot est nul. Aucune fraction ne doit apparaître sauf, éventuellement, dans l'ultime étape. On conclura en donnant l'ensemble des solutions.

4) Déterminer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fonction rationnelle
$$F : x \longmapsto \frac{x^3 - 3x + 10}{(x+1)(x-2)(x^2-3x+5)}.$$
Pour obtenir tous les points, la recherche des coefficients devra employer (au moins) trois techniques différentes.

5) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$$x \longmapsto \frac{x-3}{x^2-4x+13}.$$

6) Soit $\varepsilon \in \,]0\,;1]$. On introduit les intégrales
$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad J_\varepsilon = \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u-1}}.$$
   a) Justifier brièvement que I et J_ε existent.
   b) Première méthode : calculer I avec une intégration par parties[1].
   c) Deuxième méthode : calculer I en faisant le changement de variable $t = \tan(x)$.
   d) En faisant le changement de variable $t = \sqrt{u-1}$, calculer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon$.

1. Cette méthode a été vue en cours, il s'agit même d'un cas particulier d'une question de cours qui était au programme de colles de la semaine 7.

Partie A : Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant, appelé inégalité arithmético-géométrique :

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $a_1, \dots, a_n$ sont des réels positifs, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n$.

Cette inégalité affirme que la moyenne géométrique de réels positifs est inférieure à leur moyenne arithmétique.

Le cas où $n = 1$ est immédiat. Le cas où l'un des réels intervenant dans l'inégalité est nul est également immédiat. Dans la suite, on se donne donc $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

2) Notons $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leqslant 0.$$

3) Conclure.

Partie B : Inégalité de Carleman

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant, appelé inégalité de Carleman :

Si $N \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \dots, x_N$ sont des réels positifs, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{N} x_n$.

On pensera à utiliser, le moment venu, l'inégalité arithmético-géométrique.

Le cas où $N = 1$ est immédiat. Donnons-nous $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $x_1, \dots, x_N$ des réels positifs. Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k\,x_k \qquad \text{et} \qquad U_n = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

1) Vérifier que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$,

$$U_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n} k\,x_k.$$

2) En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$,

$$U_n \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{T_n}{n}\right)^n.$$

3) a) En utilisant la question 1 de la partie A, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

4) En déduire que

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \qquad U_n \leqslant \left(\frac{e\,T_n}{n(n+1)}\right)^n.$$

5) Montrer alors que

$$\sum_{n=1}^{N} (U_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} k\, x_k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

6) Montrer enfin que

$$\sum_{n=1}^{N} (U_n)^{1/n} \leqslant e \sum_{k=1}^{N} k\, x_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right).$$

et conclure.

Exercice 3 : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, quantité que l'on note[1] $\zeta(2)$.

Partie A : Écriture de S_n à l'aide d'intégrales

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction φ_n définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0\,;\pi], \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } \ x = 0 \\ \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} & \text{si } \ x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

1) En faisant une double intégration par parties, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(x-\pi)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4k^2}.$$

2) a) Montrer (sans utiliser de raisonnement par récurrence) que

$$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\cos\left((n+1)x\right)\sin\left(nx\right)}{\sin(x)}.$$

b) En déduire que

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n(x).$$

c) Justifier alors que φ_n est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Plus généralement, pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, on note $\zeta(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$. La fonction ζ est appelé fonction zêta de Riemann. On aura l'occasion de la rencontrer de nouveau cette année.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Introduisons la fonction $f : x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \longmapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$.

1) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.

2) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et exprimer f'.

3) a) Montrer que $\sin(t) \leqslant t$ pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

   b) En utilisant la propriété[1] de croissance de l'intégrale, montrer que

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^3}{3}.$$

   c) En calculant l'intégrale de la question précédente, obtenir que

$$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{x}{3}(f(x))^2$$

   d) En déduire que f est bornée par $\frac{\pi}{2}$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

   e) En utilisant encore la propriété de croissance de l'intégrale, montrer que

$$\forall x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant \frac{\pi^2 x}{24}.$$

   f) Conclure que f est dérivable en 0 puis que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

4) Déduire des questions B3f et B3c que la fonction $g : x \longmapsto (x-\pi)f(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que g' est bornée par $M = \dfrac{\pi^2}{48} + \dfrac{\pi}{2}$.

Partie C : Convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers $\pi^2/6$

1) Vérifier que

$$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad x(x-\pi)\varphi_n(x) = g(x)\sin((2n+1)x).$$

2) Montrer alors que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left(-\pi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right).$$

On ne cherchera pas à expliciter g'.

3) On rappelle que g' est bornée par M sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que

$$\left|\int_0^{\pi/2} g'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right| \leqslant \frac{M\pi}{2}.$$

4) Conclure que

$$\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

1. rappelée en préambule.