Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

jeudi 17 octobre 2024

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Montrer que $2\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
2) Résoudre l'équation $\cos(7x)=\sin(5x)-\sin(9x)$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
3) Résoudre l'équation $z^3=-2\overline{z}$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
4) Résoudre l'équation $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+11z+\mathrm{i}-8=0$.
   On rappelle que $\sqrt{169}=13$.
5) Justifier que la similitude directe $f:z\longmapsto(4\mathrm{i}-1)z+2(2+\mathrm{i})$ est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on précisera le centre commun ω, l'angle θ et le rapport λ.
   On donnera trois expressions possibles pour θ : une utilisant Arccos, *une utilisant* Arcsin *et une utilisant* Arctan.

Exercice 2 : Points fixes de l'exponentielle complexe

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire tous les complexes z vérifiant $\mathrm{e}^z=z$.

Partie A : Une fonction préliminaire

On définit la fonction $f:t\longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$ puis la fonction

$$g:t\longmapsto \mathrm{e}^t\sqrt{1-(f(t))^2}-\operatorname{Arccos}(f(t)).$$

1) Déterminer le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer qu'il existe $a\in\mathbb{R}_-$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que le domaine de définition de g est l'intervalle $[a\,;+\infty[$.
3) Justifier que g est dérivable sur $]a\,;+\infty[$ et calculer g'.
   On vérifiera après le calcul que, pour tout $t\in\,]a\,;+\infty[$, $g'(t)$ est du signe de $\mathrm{e}^{2t}+1-2t$.
4) En déduire le tableau de variations complet de g.

Partie B : Existence de points fixes de l'exponentielle complexe

1) Est-ce que l'exponentielle complexe admet un point fixe réel ?

2) On définit sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $h : x \longmapsto \exp\left(\frac{x}{\tan(x)}\right) - \frac{x}{\sin(x)}$.

   a) Déterminer les limites de $\frac{\sin(x)}{x}$ et $\frac{\tan(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

   b) Montrer qu'il existe $b \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h(b) = 0$.

   c) Vérifier alors que $z = \frac{b}{\tan(b)} + ib$ est un point fixe de l'exponentielle complexe.

Partie C : Ensemble des points fixes de l'exponentielle complexe

On vient de montrer que l'exponentielle complexe admettait un point fixe.

1) Exprimer $e^{\overline{z}}$ en fonction de e^z pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire qu'il suffit de déterminer les points fixes de partie imaginaire strictement positive.

2) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un point fixe de l'exponentielle complexe tel que $y > 0$.

   a) Justifier que $x = e^x \cos(y)$ et $y = e^x \sin(y)$.

   b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = 2k\pi + \text{Arccos}(f(x))$.

   c) Montrer alors que $g(x) = 2k\pi$.

3) Soit $k \in \mathbb{N}$.

   a) A l'aide des résultats de la partie A, montrer que l'équation $g(t) = 2k\pi$, d'inconnue $t \in [a\,;+\infty[$ admet une unique solution x_k.

   b) On note $y_k = 2k\pi + \text{Arccos}(f(x_k))$. Montrer que $z_k = x_k + iy_k$ est un point fixe de l'exponentielle complexe.

4) Conclure en déterminant l'ensemble de tous les points fixes de l'exponentielle complexe.

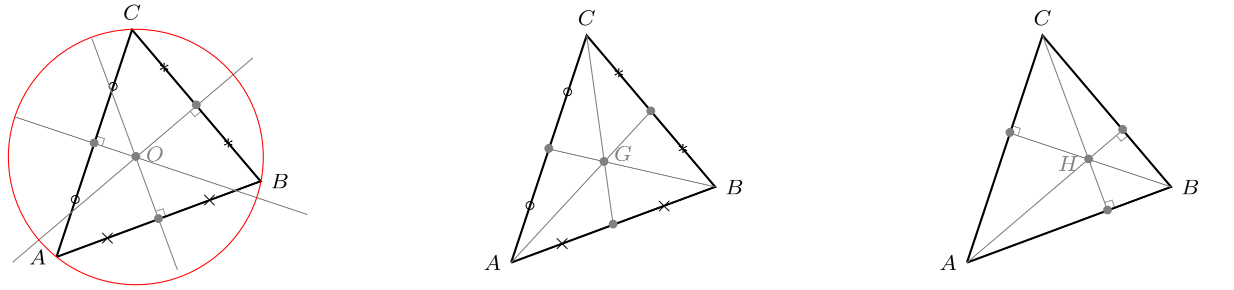
Exercice 3 : Droites remarquables dans un triangle

Soient A, B et C trois points du plan complexe qui ne sont pas alignés (et donc ils sont distincts). L'objectif de cet exercice est d'étudier des droites remarquables dans le triangle ABC et leurs points d'intersections[1].

Quelques rappels :

- Lorsque P et Q sont deux points distincts du plan, on appelle médiatrice du segment $[PQ]$ la droite perpendiculaire à $[PQ]$ qui passe par le milieu de $[PQ]$.
- Lorsque M désigne un sommet du triangle ABC, on appelle médiane issue de M, la droite qui passe par M et par le milieu du côté opposé dans le triangle.
- Lorsque M désigne un sommet du triangle ABC, on appelle hauteur issue de M, la droite qui passe par M et qui est perpendiculaire au côté opposé dans le triangle.

Puisque les points A, B et C ne sont pas alignés, deux médiatrices quelconques du triangle ABC ne sont pas parallèles (ni confondues) et donc admettent un point d'intersection. Même remarque pour deux hauteurs quelconques et même médianes quelconques. Dans la suite, on pourra donc parler du point d'intersection de deux médiatrices, de deux médianes ou de deux hauteurs sans justification.



les trois médiatrices de ABC — les trois médianes de ABC — les trois hauteurs de ABC

1. Oubliez donc que vous savez que les médianes sont concourantes, que les médiatrices sont concourantes et que les hauteurs sont concourantes. L'objectif est de le remontrer.

1) Montrer que le point G d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$ appartient aux médianes issues de A, de B et de C dans le triangle ABC.

Ainsi les trois médianes du triangle sont concourantes en G. Celui-ci s'appelle le centre de gravité du triangle ABC.

2) Soient M, P et Q des points distincts du plan d'affixes respectives z, p et q. Posons $\zeta = \dfrac{z - \frac{p+q}{2}}{p-q}$.

a) Vérifier que $\zeta \neq \dfrac{1}{2}$ puis que $\dfrac{z-q}{z-p} = \dfrac{2\zeta+1}{2\zeta-1}$.

b) Montrer que $|z-p| = |z-q|$ si et seulement si $\zeta \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

c) En déduire que M appartient à la médiatrice de $[PQ]$ si et seulement si M est équidistant à P et à Q.

d) Montrer alors que les médiatrices de $[AB]$, de $[BC]$ et de $[BA]$ sont concourantes en un point O et que A, B et C sont sur un même cercle de centre O.

Le point O est appelé centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3) On considère f la similitude directe qui est la composée de l'homothétie de centre G et de rapport 2 et de la rotation de centre G et d'angle π.

a) Déterminer une expression de f en fonction de a, b et c.

b) Notons $a' = f(a)$, $b' = f(b)$ et $c' = f(c)$ puis A', B' et C' les points du plan dont les affixes respectives sont a', b' et c'. Vérifier par le calcul que C est le milieu du segment $[A'B']$ et que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. Illustrer d'un dessin.

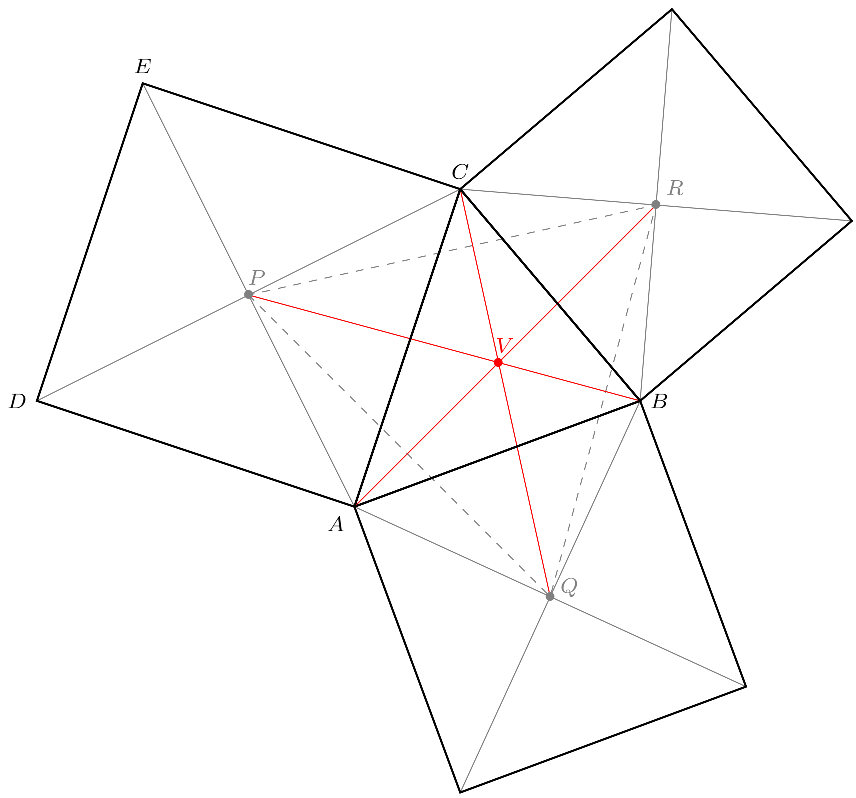
c) En déduire que la hauteur issue de C dans le triangle (ABC) est la médiatrice de $[A'B']$.

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que la hauteur issue de A dans le triangle (ABC) est la médiatrice de $[B'C']$ et que la hauteur issue de B dans le triangle (ABC) est la médiatrice de $[A'C']$.

d) En déduire que les hauteurs issues de A, de B et de C dans le triangle ABC sont concourantes en un point H.

Le point H est appelé orthocentre du triangle ABC.

4) On construit trois carrés basés extérieurement sur les côtés du triangle ABC comme sur la figure[1] ci–dessous. On appelle P, Q et R les centres de ces carrés. On note p, q et r leurs affixes respectives.



1. On prend la convention que ABC est un triangle direct sur la figure mais le résultat fonctionne si ABC est indirect.

Le but de cette question est de montrer que les droites (AR), (BP) et (CQ) sont concourantes en un point V.

a) En travaillant dans le carré $ACED$ construit à partir de $[AC]$ (cf. figure) et en s'aidant d'une similitude directe, prouver que
$$p = \left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) a.$$
On rappelle que, dans un carré, les diagonales se coupent en leur milieu.

b) Donner deux relations analogues pour q et r.

c) Vérifier que $p - b = \mathrm{i}(r - q)$.

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que $r - a = \mathrm{i}(q - p)$ et $q - c = \mathrm{i}(p - r)$.

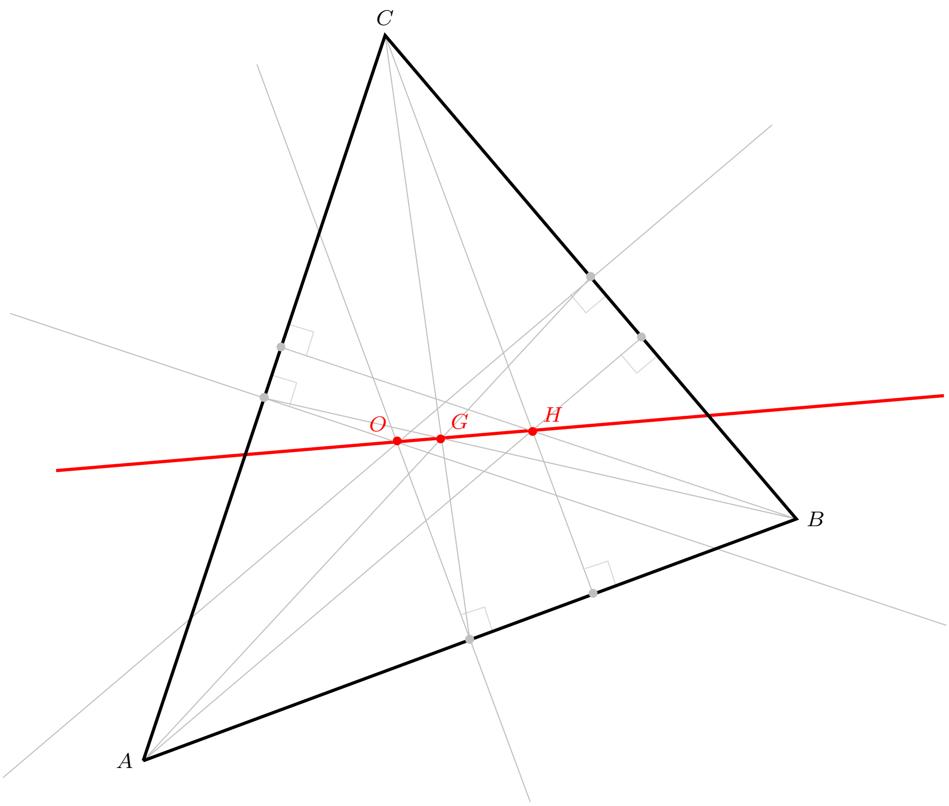
d) Conclure.

Le point V est appelé point de Vecten du triangle ABC.

5) a) Soit S et T deux points distincts du plan d'affixes s et t. Soient γ et δ des complexes. Considérons la similitude directe $\varphi : z \longmapsto \gamma z + \delta$. Montrer que, si M est un point d'affixe z qui appartient à la médiatrice de $[ST]$, alors $f(z)$ est l'affixe d'un point appartenant à la médiatrice[1] du segment limité par les points d'affixes $f(s)$ et $f(t)$.

b) En reprenant les notations de la question 3, justifier alors que l'affixe de H est l'image de l'affixe de O par f

c) En déduire que H, O et G sont alignés.



La droite passant par ces trois[2] points est appelée la droite d'Euler.

1. Autrement dit, une similitude directe préserve les médiatrices.
2. On peut montrer que, en général, le point de Vecten n'appartient pas à la droite d'Euler.