Devoir surveillé n° 10

jeudi 5 juin 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

*Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Première partie (1h30 max.)

Questions en vrac

Cet exercice devra être traité sur une copie séparée. Il ne pourra être traité que lors des 90 premières minutes de ce devoir.

1) En France, un numéro de téléphone portable est une liste ordonnée de 10 chiffres dont le premier est 0, le deuxième est 6 ou 7 et les huit suivants sont quelconques. On répondra aux questions suivantes, **sans justification** et **sans simplifier** les formules. Combien y a-t-il de numéros de téléphone portable...
   a) possibles ?
   b) dont les dix chiffres sont distincts ?
   c) avec au moins le chiffre 9 ?
   d) avec exactement trois fois le chiffre 9 ?
   e) avec exactement trois fois le chiffre 9 **ou** exactement deux fois le chiffre 1 ?
   f) dont les huit derniers chiffres forment une anagramme de 20242025 ?
   g) qui diffèrent du numéro 0620242025 d'un seul chiffre ?
   h) dont les huit derniers chiffres sont rangés dans l'ordre strictement croissant ?
   i) avec uniquement des 0 et des 6 ?

2) On lance une pièce qui donne Face trois fois plus souvent que Pile. On dispose d'une urne contenant 6 boules dont 2 rouges et 4 bleues. On tire trois boules dans cette urne successivement...
   - avec remise si la pièce a donné Face.
   - sans remise si la pièce a donné Pile.

   On a tiré en tout deux boules rouges. Quelle est la probabilité que la pièce est tombée sur Face ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. On pose $Y = 2^{X-1}$ et $Z = \binom{n}{X}$. Vérifier par le calcul que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$.
   On ne calculera pas les lois de Y et Z au préalable.

4) On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard (de façon équiprobable). Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, si on a tiré la boule k, on retire les boules numérotées de $k+1$ à n (on ne retire rien si $k = n$) et on tire de nouveau une boule dans l'urne. On note X le numéro de la première boule tirée et Y le numéro de le deuxième.

a) Déterminer la loi de X et donner, sans démonstration, son espérance.

b) Donner (en justifiant) $Y(\Omega)$.

c) Soit $(k,i) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \leqslant k$. Justifier que $\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=i]) = \dfrac{1}{nk}$. Et si $i > k$?

d) En déduire la loi de Y.
On ne cherchera pas à simplifier les expressions (car on ne le peut pas...).

e) Montrer par le calcul que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

f) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Deuxième partie

L'exercice suivant est très abordable et pourrait être qualifié de « facile ». Il est conseillé aux élèves désirant effectuer une deuxième année dans une classe étoilée de ne traiter que le problème (qui est plus difficile et intéressant).

⚠ Quel que soit le sujet choisi, les égalités ou inclusions d'événements peuvent être justifiées par des phrases (brèves). En revanche, tout calcul de probabilité doit faire intervenir une formule du cours.

Exercice : Autour de la somme de numéros de boules

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que la somme cumulée des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

A chaque tirage cette somme cumulée augmente de 1 au minimum si bien que, dans le pire des cas, elle dépassera ou atteindra n au $n^{\text{ième}}$ tirage. Pour simplifier l'étude, on suppose donc que l'on effectue exactement n tirages successifs avec remise dans cette urne et que l'on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

1) Rappeler la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

2) Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω.

3) Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Notons U_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules numérotées 1 obtenues lors des k premiers tirages. Déterminer la loi de U_k et donner, sans faire de calculs de somme, son espérance et sa variance.

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage.

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on note $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Un exemple : *Supposons que $n = 10$ et que les numéros obtenus sont, dans cet ordre, $2, 1, 5, 1, 8, 4, 3, 1, 7, 3$. Dans ce cas, les événements $[S_1 = 2]$, $[S_2 = 3]$, $[S_3 = 8]$, $[S_4 = 9]$, $[S_5 = 17]$, $[S_6 = 21]$, $[S_7 = 24]$, $[S_8 = 25]$, $[S_9 = 32]$, $[S_{10} = 35]$ sont réalisés. Puisque les événements $[S_4 < 10]$ et $[S_5 \geqslant 10]$ sont réalisés, on en déduit que $[T_{10} = 5]$ est réalisé.*

4) a) Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, déterminer la loi de X_i et donner, sans faire de calculs de somme, son espérance et sa variance.

b) En déduire l'espérance de S_k pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

5) a) Déterminer $T_n(\Omega)$, en justifiant brièvement.

b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = \dfrac{1}{n^{n-1}}$.

6) **Quelques cas particuliers.**

a) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

b) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$. Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.

7) a) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

b) Fixons $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. Écrire S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

c) Soient $i \in [\![k+1\,;n]\!]$ et $j \in S_k(\Omega)$. Déterminer alors $\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1} = i)$.
On séparera les cas où $j \leqslant i-1$ et $j \geqslant i$.

d) En déduire que
$$\forall i \in [\![k+1\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

8) a) A l'aide de la formule du triangle de Pascal et d'une somme télescopique [1], montrer que pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$,
$$\sum_{j=a}^{b} \binom{j-1}{a-1} = \binom{b}{a}.$$

b) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $H(k)$ la propriété :
$$\text{« } \quad \forall i \in [\![k,n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \quad \text{ » .}$$
Montrer par récurrence [2] que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, la propriété $H(k)$ est vraie.

9) a) Justifier avec des phrases que, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$,
$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On pourra écrire la formule définissant $\mathbb{P}(T_n > k)$ ci-dessus comme un produit et remarquer que c'est une fonction rationnelle en la variable n.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

10) a) Montrer que, si Z est une variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$, alors
$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z > k).$$

b) En appliquant la formule précédente avec $Z = T_n$, montrer que
$$\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

1. On rappelle que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque k et n sont des entiers naturels tels que $k > n$.
2. ... sur la variable k (n est fixé).

On se donne dans tout ce problème un entier n supérieur ou égal à 3.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, ainsi que de n boules numérotées de 1 à n. On répartit de façon indépendante et équiprobable les boules dans les urnes. Plus précisément : pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, la probabilité de chaque boule d'être dans l'urne numérotée i est égale à $\dfrac{1}{n}$, et ce indépendamment des autres boules.

On admet l'existence d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

- Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note X_i le nombre de boules dans l'urne numérotée i.
- On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
- On pose $s_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$. On fixe dans tout le problème un réel $\alpha > 0$ et on pose[1] $v_n = \lfloor \alpha s_n \rfloor$. Précisons que le réel α est fixe dans tout l'exercice (sauf mention du contraire) : ainsi, quand on parlera de limite, d'équivalents etc. ce sera quand n tend vers $+\infty$.
- Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i \geqslant v_n]}$. On pose ensuite $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. En d'autres termes, Z_n compte le nombre d'urnes qui contiennent au moins v_n boules (il n'est pas demandé de prouver cette affirmation).

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique de $E(Z_n)$ (c'est-à-dire du nombre moyen d'urnes contenant au moins v_n boules) et de M_n (c'est-à-dire du nombre de boules dans l'urne qui en contient le plus).

Partie A : Modélisation probabiliste

1) Proposer un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

2) Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, donner la loi de X_i. Donner sans démonstration son espérance et sa variance.

3) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$. En déduire que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas indépendantes.

4) Soit $(i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2$.
   a) Que vaut $\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$ lorsque $i + j > n$?
   b) Supposons que $i + j \leqslant n$. Avec des arguments combinatoires, justifier que

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\frac{(n-2)^{n-i-j}}{n^n}.$$

Partie B : $\mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n)$ et $\mathbb{P}(X_1 = v_n)$ sont équivalents

1) On note $\lambda_n = \dfrac{n - v_n}{(v_n + 1)(n-1)}$. Justifier que

$$\forall k \geqslant v_n, \qquad \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1)}{\mathbb{P}(X_1 = k)} = \frac{n-k}{(k+1)(n-1)} \leqslant \lambda_n.$$

2) Montrer que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \underset{+\infty}{\sim} u_n$. En déduire un équivalent de v_n et de $n - v_n$ quand n tend vers $+\infty$ puis la limite de la suite de terme général λ_n.

3) Montrer par une récurrence que l'on rédigera que

$$\forall k \in [\![v_n\,;n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_1 = k) \leqslant \lambda_n^{k-v_n}\mathbb{P}(X_1 = v_n)$$

1. Le choix de cette valeur surprenante sera justifié plus tardivement dans le sujet.

4) En déduire que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n) \leqslant \frac{\mathbb{P}(X_1 = v_n)}{1-\lambda_n}.$$

5) En déduire que $\mathbb{P}(X_1 = v_n) \underset{+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n)$.

Partie C : Limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$

1) Justifier que $\mathbb{E}(Z_n) = n\mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n)$.

2) En utilisant la partie précédente, conclure que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} n\binom{n}{v_n}\left(\frac{1}{n}\right)^{v_n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-v_n}$$

Le but de cette partie est de donner la limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $\alpha \neq 1$.

3) Donner la limite de la suite de terme général $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-v_n}$.

4) a) Prouver que

$$\binom{n}{v_n} = \frac{n^{v_n}}{(v_n)!}\prod_{j=0}^{v_n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

b) Montrer que $\left(1-\frac{v_n}{n}\right)^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

c) En encadrant judicieusement $\prod_{j=0}^{v_n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$, justifier que

$$\binom{n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{v_n}}{(v_n)!}.$$

5) Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}\exp\left(v_n - v_n\ln(v_n) - \frac{\ln(v_n)}{2}\right).$$

6) Justifier que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$. En déduire que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}\exp\big((1-\alpha)\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)\big).$$

7) Donner la limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $\alpha < 1$ et lorsque $\alpha > 1$.

On comprend a posteriori le choix de v_n en tant que valeur critique au sens où le comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$ change radicalement selon que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. Explorons cela plus en détails dans les parties suivantes.

Partie D : Limite de $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ lorsque $\alpha < 1$

1) Prouver que $[Z_n = 0] \subset [|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geqslant \mathbb{E}(Z_n)]$. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{\mathbb{E}(Z_n)^2} - 1.$$

2) Prouver que $\mathbb{E}\left(Z_n^2\right) = \mathbb{E}(Z_n) + n(n-1)\mathbb{E}(Y_1Y_2)$.
On pourra utiliser sans justifier le fait que, si $i \neq j$, alors Y_1Y_2 a la même loi que Y_iY_j.

3) À l'aide de la question A4,

$$\mathbb{E}(Y_1Y_2) = \sum_{i=v_n}^{n}\sum_{j=v_n}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^{i+j}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-i-j}.$$

4) a) Prouver que $1-\dfrac{k}{n} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Soient i et j vérifiant $i+j \leqslant n$. Montrer que

$$\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j} \times \prod_{k=0}^{j-1}\left(\frac{n-i-k}{n-k}\right) \leqslant \binom{n}{j}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{ij}.$$

5) En déduire que

$$\mathbb{E}(Y_1Y_2) \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2-1}\sum_{i=v_n}^{n}\sum_{j=v_n}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^{i+j}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n-i-j}$$

6) Montrer finalement que

$$\mathbb{E}(Y_1Y_2) \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2-1}\mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n)^2.$$

7) On montrerait de même que dans la partie C (on ne demande pas de le faire) que $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
En se souvenant que $\mathbb{E}(Z_n) = n\mathbb{P}(X_1 \geqslant v_n)$, et à l'aide de la question D1, prouver que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ lorsque $\alpha < 1$.

Partie E : Comportement asymptotique de M_n

On fixe dans toute cette partie $\varepsilon \in]0\,;1[$. On rappelle que $M_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, $s_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ et $v_n = \lfloor \alpha s_n \rfloor$.

1) Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{s_n}-1\right| \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geqslant (1+\varepsilon)s_n\right) + 1 - \mathbb{P}\left(M_n > (1-\varepsilon)s_n\right).$$

2) a) Exprimer l'événement $[M_n \geqslant v_n]$ en fonction de l'événement $[Z_n = 0]$.

b) Justifier que, pour n assez grand,

$$(1-\varepsilon)s_n < \left\lfloor \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)s_n \right\rfloor.$$

On pourra calculer la limite du quotient de ces deux quantités.

c) En déduire qu'il existe une valeur de α (que l'on explicitera) telle que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(M_n \geqslant v_n\right) \leqslant \mathbb{P}\left(M_n > (1-\varepsilon)s_n\right).$$

d) Prouver que, pour cette valeur de α,

$$\mathbb{P}\left(M_n > (1-\varepsilon)s_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

3) a) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \geqslant v_n) \leqslant \mathbb{E}(Z_n)$ quelle que soit la valeur de α.
On exprimera $[M_n \geqslant v_n]$ *en fonction de l'événement* $[Z_n \geqslant 1]$.

b) Montrer finalement que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{\dfrac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}}-1\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$