# Devoir surveillé n° 1

**samedi 28 septembre 2024**

*La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.*

*Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.*

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

*Rédigez sur une copie double* ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements.* ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

## Exercice 1 : Questions en vrac

1) Résoudre l'inéquation $3x - 5 + \sqrt{13 - 6x} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
*On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour résoudre cette inéquation.*

2) Résoudre l'inéquation $\lfloor 3 - 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer toutes les fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

4) On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = x_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_{n-1}}{n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, \qquad x_n \geqslant \sqrt{n+1}.$$

5) Posons $f : x \longmapsto \ln(x)\,(2 - \ln(x))$.
   a) Dresser le tableau de variations complet de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec limite aux bornes).
   b) En déduire que $f$ réalise une bijection de $]0\,;\mathrm{e}]$ sur un intervalle à préciser.
   c) Expliciter la réciproque de $f\big|_{]0\,;\mathrm{e}]}$.

## Exercice 2 : Une étude de fonction

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x.$$

1) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.

2) Montrer que $f$ est une fonction paire sur $D_f$.

On pose $I = D_f \cap \mathbb{R}_+$ et on définit sur $I$ la fonction

$$g : x \longmapsto \ln(x-1) - \ln(x+1) + \frac{2x}{x^2-1}.$$

*On ne demande pas de justifier que $g$ est bien définie sur $I$.*

3) Préciser (sans démonstration) le réel $a$ tel que $I = ]a\,;+\infty[$.

4) Justifier que $f$ est dérivable sur $I$ et montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = g(x)f(x)$.

5) a) Calculer la limite de $g$ en $+\infty$.

   b) Étudier les variations de $g$ sur $I$.

   c) En déduire les variations de $f$ sur $I$.

6) Montrer que $f$ admet une limite nulle en $a^+$.

On prolonge alors $f$ par continuité en posant $f(a) = f(-a) = 0$.

7) a) Justifier que $h^h \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1$ puis en déduire que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $f$ est dérivable en $a$ et que $f'(a) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Donner alors l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ en $a$.

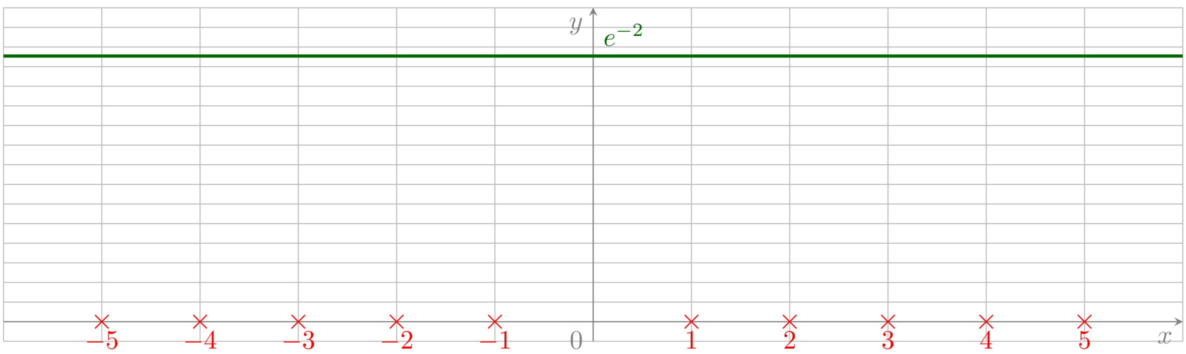
8) On définit $T : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]-1\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

   a) Vérifier que, pour tout $x \in I$, $\ln(f(x)) = -\dfrac{2x}{x+1}\,T\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)$.

   b) En déduire que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-2}$.

9) Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de $f$ (sur $D_f$ tout entier).

*On admet provisoirement que la fonction $f$ est concave sur $I$. Il sera judicieux d'agrandir au moins 20 fois l'échelle des ordonnées comme ceci :*




*On reproduira la figure ci-dessus sur la copie (sans le quadrillage), on utilisera des couleurs, on placera les points de la courbe d'abscisses $3/2$, $2$ et $3$, on tracera la tangente en $a$ et les asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$. Tout cela approximativement mais* ***soigneusement*** *! Voici deux approximations pour vous aider : $e^{-2} \approx 0,14$ et $1/(5\sqrt{5}) \approx 0,09$.*

10) **Question bonus** [1]**.** Montrer que $f$ est concave sur $I$.

1. A ne traiter que si vous avez abordé ou traité ou tenté de faire tout le reste... notamment, il est impératif d'avoir traité l'exercice 1 et le problème avant d'aborder cette question.

Dans ce problème, on se donne un entier naturel non nul $d$. On cherche à résoudre l'équation (dite de Pell-Fermat)

$$(E_d) \qquad x^2 - dy^2 = 1$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Autrement dit, on cherche tous les couples $(x, y)$ d'entiers naturels tels que $x^2 - dy^2 = 1$.

Bien sûr le couple $(1, 0)$ est solution de $(E_d)$. On dit qu'un couple d'entiers $(x, y)$ est solution non triviale de l'équation $(E_d)$ lorsque $(x, y)$ est solution non triviale de $(E_d)$ et que $y \in \mathbb{N}^*$. Le but de ce problème est de déterminer les solutions non triviales.

### Partie A : Le cas où $d$ est un carré parfait

On suppose dans cette partie uniquement que $d$ est un carré parfait : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d = k^2$. En utilisant une identité remarquable, montrer que l'équation $(E_d)$ n'admet pas de solution non triviale, c'est-à-dire que $(1, 0)$ est la seule solution de $(E_d)$.

### Partie B : Une classe de solutions

Dans cette partie et les suivantes, on suppose que $d$ n'est pas un carré parfait. En particulier $d \in \mathbb{N}^*$ et on admet que $\sqrt{d}$ est un irrationnel[1].

On admet aussi $(E_d)$ possède une solution non triviale.

1) a) Justifier que l'ensemble $A_d = \{y \in \mathbb{N}^* \,|\, \exists x \in \mathbb{N},\, x^2 - dy^2 = 1\}$ admet un minimum. On note alors $y_1 = \min(A_d)$ et on pose $x_1 = \sqrt{1 + dy_1^2}$.
   b) Pourquoi $x_1$ est-il un entier naturel non nul ?
   c) Expliciter le couple $(x_1, y_1)$ lorsque $d = 2$, $d = 3$ et $d = 5$.

Dans la suite, on suppose que $d$ est un entier naturel non nul quelconque et n'étant pas un carré parfait. On définit les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_1 x_n + d y_1 y_n \\ y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n \end{cases}.$$

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n$ et $y_n$ sont des entiers naturels non nuls vérifiant

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \qquad \text{et} \qquad x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n.$$

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, y_n)$ est solution non triviale de $(E_d)$.
   *On ne raisonnera pas par récurrence à cette question.*
   c) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sont strictement croissantes[2]. Que peut-on en affirmer concernant le nombre de solutions de $(E_d)$ ?

### Partie C : Ce sont les seules solutions

On vient donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le couple $(x_n, y_n)$ est solution non triviale de $(E_d)$. Le but de cette partie est de montrer qu'il s'agit des seules solutions non triviales de $(E_d)$. On se donne donc une solution non triviale $(x, y)$, c'est-à-dire que $y > 0$ et $x^2 - dy^2 = 1$.

1) Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(x + y\sqrt{d})}{\ln(x_1 + y_1\sqrt{d})} \right\rfloor$. A l'aide de la question B2a, montrer que

$$1 \leqslant \frac{x + y\sqrt{d}}{x_{n_0} + y_{n_0}\sqrt{d}} < x_1 + y_1\sqrt{d}.$$

1. On le montrera dans le chapitre 12.
2. C'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+1} > x_n$ et $y_{n+1} > y_n$.

2) a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ (que l'on explicitera) tel que

$$\frac{x + y\sqrt{d}}{x_{n_0} + y_{n_0}\sqrt{d}} = a + b\sqrt{d}.$$

b) Vérifier par le calcul que $a^2 - db^2 = 1$.

3) Justifier que $x > y\sqrt{d}$ et que $x_{n_0} > y_{n_0}\sqrt{d}$. En déduire que $a \in \mathbb{N}^*$.

4) On suppose que $b < 0$.

a) Montrer que $b\sqrt{d} = -\sqrt{a^2 - 1}$. En déduire que

$$a + b\sqrt{d} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

b) En déduire que $a = 1$ et aboutir à une absurdité.

5) En déduire que $(a, b)$ est solution de $(E_d)$.

6) Supposons que $(a, b)$ est une solution non triviale de $(E_d)$. En utilisant la minimalité de $y_1$, aboutir à une absurdité.

7) Conclure que $x = x_{n_0}$ et $y = y_{n_0}$.
*On utilisera le fait que $\sqrt{d}$ est rationnel.*

Ainsi toute solution non triviale est bien l'un des couples $(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $(x_0, y_0) = (1, 0)$, on conclut que $\{(x_n, y_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation de Pell-Fermat [1].

1. Pour autant, cette résolution n'est pas entièrement satisfaisante :

- Déjà nous nous sommes contentés d'admettre qu'il existait une solution non triviale (ce qui est vrai, mais non montré dans ce problème).
- Le fait de savoir qu'il existe une solution non triviale ne nous dit pas comment la trouver. Par exemple :
  - ⋆ Si $d = 13$, on a $y_1 = 180$, ce qui force déjà à vérifier beaucoup de nombres avant de trouver $y_1$.
  - ⋆ Si $d \leqslant 60$, on peut montrer que $y_1 \leqslant 10000$.
  - ⋆ Si $d = 61$, on a $y_1 = 226153980$. Bon courage pour la trouver à la main !