Devoir maison n° 9

À rendre le lundi 6 janvier 2025

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Problème : Théorèmes de Knaster-Tarski et de Cantor-Bernstein

Partie A : Notion de treillis

- On dit qu'un ensemble ordonné non vide $(E, \preccurlyeq)$ est un treillis si, pour tout $(x, y) \in E^2$, la partie $\{x; y\}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans E.
- On dit qu'un treillis $(E, \preccurlyeq)$ est complet si toute partie non vide de E possède une borne supérieure et une borne inférieure dans E.

1) Montrer qu'un ensemble totalement ordonné est un treillis.

2) Montrer qu'un treillis complet admet un minimum et un maximum.

3) a) Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que, si E est un treillis complet, alors E est inclus dans un segment.

   b) Montrer que tout segment de $\mathbb{R}$ est un treillis complet.

   c) Un treillis complet de $\mathbb{R}$ est-il forcément un segment ?

4) Soit E un ensemble quelconque. Montrer que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un treillis complet.

5) Montrer que $(\mathbb{N}, |)$ est un treillis. Est-il complet ?

Partie B : Le treillis des relations d'équivalences sur E

On considère dans cette partie un ensemble E. On note $\mathscr{E}(E)$ l'ensemble des relations d'équivalences sur E. On définit une relation $\ll$ sur $\mathscr{E}(E)$ par : pour tout $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans $\mathscr{E}(E)$,

$$\mathcal{R} \ll \mathcal{R}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}'y.$$

Autrement dit, $\mathcal{R} \ll \mathcal{R}'$ lorsque tous éléments équivalents pour la relation $\mathcal{R}$ sont équivalents pour la relation $\mathcal{R}'$.

1) Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{E}(E)$.

2) Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans $\mathscr{E}(E)$. On définit une relation binaire sur E, note $\mathcal{R} \top \mathcal{R}'$ par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad x(\mathcal{R} \top \mathcal{R}')y \quad \Longleftrightarrow \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}'y).$$

   a) Montrer que $\mathcal{R} \top \mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence sur E.

   b) Montrer que $(\mathcal{R} \top \mathcal{R}') \ll \mathcal{R}$ et $(\mathcal{R} \top \mathcal{R}') \ll \mathcal{R}'$.

   c) Montrer que, si $\mathcal{S} \in \mathscr{E}(E)$ est tel que $\mathcal{S} \ll \mathcal{R}$ et $\mathcal{S} \ll \mathcal{R}'$, alors $\mathcal{S} \ll (\mathcal{R} \top \mathcal{R}')$.

3) Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans $\mathscr{E}(E)$. On définit une relation binaire sur E, note $\mathcal{R} \perp \mathcal{R}'$ par : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x(\mathcal{R} \perp \mathcal{R}')y$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ tels que

$$x\mathcal{R}x_1,\ x_1\mathcal{R}'x_2,\ x_2\mathcal{R}x_3,\ x_3\mathcal{R}'\ x_4,\ \cdots\ , x_{2n-2}\mathcal{R}x_{2n-1},\ x_{2n-1}\mathcal{R}'y.$$

   a) Montrer que $\mathcal{R} \perp \mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence sur E.

   b) Montrer que $\mathcal{R} \ll (\mathcal{R} \perp \mathcal{R}')$ et $\mathcal{R}' \ll (\mathcal{R} \perp \mathcal{R}')$.

c) Montrer que, si $\mathcal{S} \in \mathscr{E}(E)$ est tel que $\mathcal{R} \ll \mathcal{S}$ et $\mathcal{R}' \ll \mathcal{S}$, alors $(\mathcal{R} \perp \mathcal{R}') \ll \mathcal{S}$.

4) En déduire que $(\mathscr{E}(E), \ll)$ est un treillis.

Partie C : Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un treillis complet. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application croissant, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad x \preccurlyeq y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \preccurlyeq f(y).$$

On introduit $A = \{x \in E \,|\, x \leqslant f(x)\}$.

1) Justifier que A n'est pas vide.

Comme $(E, \preccurlyeq)$ est un treillis complet, A admet donc une borne supérieure dans E que l'on notera α dans la suite.

2) Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de A.

3) En déduire que $\alpha \in A$ puis que α est un point fixe de f, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

4) Montrer que α est le plus grand point fixe de f (c'est-à-dire que α est le maximum de l'ensemble des points fixes de f).

Ce résultat est appelé théorème du point fixe de Knaster-Tarski.

Partie D : Théorème de Cantor-Bernstein

Soient E et F deux ensembles non vides. On suppose qu'il existe une injection $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$. L'objectif de cette partie est de prouver qu'il existe alors une bijection de E sur F. Ce résultat est appelé théorème de Cantor-Bernstein.

Si f est surjective, alors f est bijective et le théorème prouvé. De même si g est surjective. Supposons dans la suite que ni f, ni g ne sont surjectives.

On introduit la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & E \Big\backslash g\big(F \backslash f(A)\big) \end{array} \right.$$

Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on a donc $E \backslash \varphi(A) = g\big(F \backslash f(A)\big)$.

1) On rappelle que $(E, \mathscr{P}(E))$ est un treillis complet (cf. partie A). En utilisant le théorème de Knaster-Tarski, montrer que φ admet un point fixe.

Notons A_0 un point fixe de φ et posons $B_0 = E \backslash A_0$ et $C_0 = F \backslash f(A_0)$.

2) Illustrer ces ensembles à l'aide d'un dessin faisant apparaître E, F, f, g, A_0, B_0, C_0 et $f(A_0)$.

3) Justifier que, pour tout $x \in B_0$, il existe un unique $y_x \in C_0$ tel que $x = g(y)$.

On définit alors l'application $\psi : B_0 \longrightarrow F$ qui à $x \in B_0$ associe son unique antécédent y_x par g. On introduit ensuite l'application

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si} \quad x \in A_0 \\ \psi(x) & \text{si} \quad x \in B_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

4) Vérifier que $h(A_0) \cap h(B_0) = \varnothing$.

5) Montrer que h est une bijection de E sur F.