Devoir maison nº 8

À rendre le lundi 9 décembre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Une suite récurrente sous-linéaire d'ordre 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

Une récurrence immédiate (que l'on ne demande pas de faire) assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$

1) Dans cette question seulement on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
   a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle que l'on précisera. Aboutir à une contradiction.
2) a) Justifier brièvement qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 1$.
   b) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0 + 3$, $u_n > \sqrt{2}$.

On vient de montrer que, quelles que soient les valeurs (strictement positives) de u_0 et u_1, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite dépassent strictement $\sqrt{2}$. Ainsi, pour simplifier les notations dans la suite, on supposera désormais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |u_n - 2|$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2}.$$
   b) Justifier que $2 + \sqrt{2\sqrt{2}} > 3$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1} + v_n}{3}.$$
4) On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = v_0$, $w_1 = v_1$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_{n+2} = \frac{w_{n+1} + w_n}{3}.$$
   a) Montrer $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant w_n$.
   c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.