Devoir maison n° 7

À rendre le lundi 2 décembre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient non constants

L'objectif de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy'(x) + 4y(x) = 8x^2 - 3 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

sur l'intervalle $]-1\,;1[$.

1) Simplifier $\cos(2\operatorname{Arccos}(t))$ et $\sin(2\operatorname{Arccos}(t))$ pour tout $t \in [-1\,;1]$.

2) Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$(F) : z'' + 4z = 1 + 4\cos(2x)$$

d'inconnue z deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Soit y une fonction deux fois dérivable sur sur $]-1\,;1[$ qui vérifie

$$(E) : (1-x^2)y'' - xy'(x) + 4y(x) = 8x^2 - 3.$$

On définit sur $]0\,;\pi[$ la fonction $z : t \longmapsto y(\cos(t))$.

a) Vérifier que z est solution de (F).

b) Justifier que $z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $z'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

c) En déduire la fonction z sur $]0\,;\pi[$.

d) Expliciter avec la fonction y sur $]-1\,;1[$.

4) Conclure.

Exercice 2 : Infinité des nombres premiers congrus à 1 ou 2 modulo 3

1) Combien y a-t-il de nombres premiers congrus à 0 modulo 3 ?

Notons $E_1 = \{p \in \mathbb{P} \,|\, p \equiv 1\,[3]\}$ et $E_2 = \{p \in \mathbb{P} \,|\, p \equiv 2\,[3]\}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$a_n = 2 + \prod_{k=1}^{n}(2k+1).$$

a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n n'admet aucun diviseur premier inférieur à $2n+1$.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n admet au moins un diviseur premier congru à 2 modulo 3.

c) En déduire que E_2 est infini.

3) Raisonnons par l'absurde et supposons que E_1 est fini. Puisqu'il contient 7, il est non vide. Notons r le cardinal de E_1 puis $E_1 = \{p_1, \ldots, p_r\}$. Posons enfin $m = 2p_1p_2\ldots p_r$ le double du produit de ces nombres.

a) Justifier que $a = m^2 + m + 1$ admet un diviseur premier p strictement supérieur à 3.

b) Montrer que $m^3 \equiv 1\,[p]$.

c) Justifier que $m \not\equiv 1\,[p]$ et $m^2 \not\equiv 1\,[p]$ et $m^2 \not\equiv m\,[p]$.

d) En utilisant le petit théorème de Fermat, conclure que $p \equiv 1\,[3]$.

e) Aboutir à une absurdité.

Ainsi E_1 est infini.

Exercice 3 : Le produit de 5 entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un carré.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de cet exercice est de montrer que le produit de cinq entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un carré [1]. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = m^2$.

1) Justifier que, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $u \wedge v = 1$, si uv est un carré, alors u et v sont des carrés.

2) a) Déterminer tous les couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $b^2 - a^2 \in [\![1\,;4]\!]$.

   b) En déduire que, parmi $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, au plus un est un carré.

3) Soit $i \in [\![0\,;4]\!]$. Notons

$$N_i = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 4 \\ k \neq i}} (n+k).$$

   a) Soit $k \in [\![0\,;4]\!] \backslash \{i\}$. Quels sont les diviseurs premiers éventuels de $(n+i) \wedge (n+k)$?
   On donnera l'ensemble des diviseurs premiers possibles sans rentrer dans le cas par cas.

   b) En déduire qu'il existe des entiers naturels α_i et β_i tels que $(n+i) \wedge N_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$.

   c) Conclure qu'il existe $r_i \in \{0; 1\}$, $s_i \in \{0; 1\}$ et $m_i \in \mathbb{N}^*$ tels que $n + i = 2^{r_i} 3^{s_i} m_i^2$ (l'entier m_i n'étant pas forcément premier avec 2 et 3).
   On penser à utiliser la question 1 puis le théorème de la division euclidienne.

4) Justifier que, parmi les entiers $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, un seul est divisible par 6 ou bien aucun.
On détaillera plus précisément le cas de figure où aucun n'est divisible par 6 en terme de congruence modulo 6.

5) Supposons qu'aucun des entiers $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ ne soit divisible par 6. Justifier que n et $n+4$ sont des carrés et aboutir à une absurdité.

6) Soit $i \in [\![1\,;3]\!]$. On suppose que $n+i$ est divisible par 6. A l'aide des questions précédentes, montrer que $n+i+1$ et $n+i-1$ sont deux carrés et aboutir à une absurdité.

7) On suppose dans cette question que n est divisible par 6.

   a) Montrer que $n+2$ et $n+4$ sont, chacun, ou bien un carré ou bien un le double d'un carré.

   b) Que dire de $n+1$? Aboutir à une absurdité.

8) Montrer que, si $n+4$ est divisible par 6, alors cela conduit encore une fois à une absurdité.

Ainsi, tous les cas de figure mènent à une absurdité : le produit de cinq entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un carré.

1. Par carré, on entend bien sûr un carré.