Devoir maison n^o 6

À rendre le jeudi 14 novembre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Problème : Irrationalité de π

On se donne dans cet exercice un rationnel r qui n'est pas congru à 0 modulo $\dfrac{\pi}{2}$. En particulier $\tan(r)$ est bien définie. Notons $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de montrer que $\tan(r)$ est irrationnel et d'en déduire que π l'est également.

Puisque $\tan$ est impaire sur $\mathbb{R}\backslash\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, on peut supposer que $r > 0$ et donc que $a \in \mathbb{N}^*$.

Partie A : Préliminaires : positivité, croissance et inégalité triangulaire pour les intégrale

L'objectif de cette partie est de prouver quelques résultats importants qui sont au programme [1] (mais que nous n'avons pas encore vu) et qui seront utiles dans la suite de ce problème.

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soient f et g une fonction continue sur $[a\,;b]$.

1) *Propriété de positivité des intégrales.* On suppose que f est positive sur $[a\,;b]$. En étudiant les variations d'une primitive de f, montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

2) *Propriété de croissance des intégrales.* On suppose que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Déduire de la question précédente que
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

3) *Inégalité triangulaire pour les intégrales.* À l'aide d'un encadrement de f, déduire de la questions précédente que
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Partie B : Étude d'une suite définie à l'aide d'une intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(2ax - bx^2)^n}{n!} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{2r} f_n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

1) Exprimer I_0 en fonction de $\sin(r)$ et expliquer pourquoi $I_0 \neq 0$.

2) a) Calculer les intégrales
$$A = \int_0^{2r} x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{2r} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
.

   b) En déduire que $I_1 = (-2a\cos(r) + 2b\sin(r)) \times 2\sin(r)$. On rappelle que $r = \dfrac{a}{b}$.

1. Nous les verrons officiellement (et les montrerons autrement) dans le chapitre 24.

3) On se donne dans cette question $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.

   a) Donner les valeurs de $f_n(2r)$ et de $f_n'(2r)$.

   b) En déduire que

$$I_n = -\int_0^{2r} f_n''(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4a^2 f_n(x) - (4n+6)bf_{n+1}(x) = f_{n+2}''(x)$.

   b) En déduire que I_{n+2} en fonction de I_{n+1} et de I_n.

5) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$I_n = (a_n \cos(r) + b_n \sin(r)) \times 2\sin(r).$$

Partie C : Irrationnalité de $\tan(r)$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\tan(r) \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\tan(r) = \dfrac{p}{q}$.

1) a) Rappeler pourquoi $\sin(r)$ et $\cos(r)$ sont non nuls. En déduire que $\sin(2r) \neq 0$.

   b) À l'aide de la question B5, montrer que $\dfrac{q \times I_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Donner le tableau de variations de la fonction $g : x \longmapsto 2ax - bx^2$ sur $[0\,;2r]$.

3) a) En utilisant l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale (cf. partie A), montrer que

$$|I_n| \leqslant \left(\frac{a^2}{b}\right)^n \times \frac{2r}{n!}.$$

   Nous verrons dans le chapitre 14 que $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^n \times \dfrac{2r}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On admet[1] qu'il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{qI_n}{\sin(2r)} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$, $I_n = 0$.

   c) Justifier que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \neq 0\}$ admet un plus grand élément, qu'on notera n_1.

   d) En utilisant la question B4b, conclure à une absurdité.

4) Montrer que π est irrationnel.

1. On montrera aussi ce résultat dans le chapitre 14 : lorsqu'une suite tend vers 0, tous ses termes appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.