Devoir maison n° 5

À rendre le lundi 4 novembre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Problème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H(n)$ la propriété suivante :

Pour tous réels $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, on a $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

Le but de ce problème est de montrer cette inégalité appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz*[1] et d'en étudier quelques applications. Dans la partie A, on admet temporairement l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on en étudie deux applications simples (afin de nous familiariser avec cette inégalité). La partie B est consacrée à la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz par récurrence. La partie C propose une autre méthode de preuve. La partie D consiste à déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels pour que l'inégalité soit une égalité. Enfin, dans la partie E, nous montrons une autre inégalité qui est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les parties A, B, C et E sont indépendantes. La partie D utilise des résultats de la partie C. Les parties A et E sont des applications et utilisent donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie A : Quelques applications simples

Les questions 1 et 2 ci-dessous sont indépendantes. A chaque fois on appliquera l'inégalité de Cauchy-Schwarz (que l'on admet temporairement dans cette partie) à des réels bien choisis.

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{2n}{n+1}.$$

1. On pourra écrire ICS pour abréger dans ce devoir.

Partie B : Une preuve par récurrence

Le but de cette partie est de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$ est vraie.

1) Justifier rapidement que $H(1)$ est vraie.

2) Montrer que $H(2)$ est vraie.

On se donne dans la suite de cette partie un entier $n \geqslant 2$ quelconque et on suppose que $H(n)$ est vraie. On se donne également $a_1, \dots, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_{n+1}$ des réels.

3) En appliquant l'hypothèse de récurrence à des réels judicieusement choisis [1], montrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} + |a_{n+1}| \times |b_{n+1}|.$$

4) En déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i b_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n+1} |b_i|^2\right).$$

On pourra appliquer la propriété $H(2)$ à des réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ judicieusement choisis.

5) Montrer que $H(n+1)$ est vraie.

6) Conclure.

Partie C : Autre preuve utilisant un trinôme du second degré

Le but de cette partie est de montrer avec une autre preuve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donnons-nous $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels et considérons la fonction polynomiale P définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2.$$

On suppose que les a_i, $i \in [\![1\,;n]\!]$, ne sont pas tous nuls (car sinon, l'inégalité est immédiate : il s'agit de $0 \leqslant 0$).

1) Justifier que P est une fonction polynomiale du second degré dont on précisera les coefficients.

2) Justifier (sans le calculer) que le discriminant Δ de P est négatif.

3) Expliciter son discriminant Δ.

4) Conclure en calculant Δ.

Partie D : Le cas d'égalité

Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On a montré dans les parties B et C que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Le but de cette partie est de déterminer des conditions pour que cette inégalité soit une égalité.

On suppose que les a_i, $i \in [\![1\,;n]\!]$, ne sont pas tous nuls (car sinon il est immédiat que l'inégalité est une égalité : il s'agit de $0 = 0$).

1. Et oui on est pas obligé de l'appliquer aux $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ que l'on vient d'introduire. Le « pour tout » dans $H(n)$ (que l'on suppose vraie) nous assure que l'inégalité est vraie quel que soit le choix des $2n$ réels qui entrent en jeu dans l'inégalité.

1) On reprend les notations de la partie C (la fonction polynomiale P et son discriminant Δ). On suppose que l'inégalité est une égalité.

   a) En reprenant les calculs de la question C4, montrer que $\Delta = 0$.

   b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $b_i = \lambda a_i$.
   On dit que « le vecteur $(b_1, \dots, b_n)$ est proportionnel au vecteur $(a_1, \dots, a_n)$ ».

2) Réciproquement, montrer qu'il y a égalité lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $b_i = \lambda a_i$.

Partie E : Inégalité de Hardy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne dans cette partie $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes, et la question 4 utilisent les trois questions qui la précèdent.

1) a) Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée à des réels $a_1, \dots, a_k$ et $b_1, \dots, b_k$ bien choisis que l'on explicitera) montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right).$$

   b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\quad \dfrac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant \dfrac{4}{k(k+1)^2} \times \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}.$

   c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2}.$$

2) Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Montrer que

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{i^2}.$$

3) En déduire l'*inégalité de Hardy* :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$