Devoir maison n° 4

À rendre le samedi 12 octobre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Deux méthodes pour simplifier une fonction

L'objectif de cet exercice et d'étudier, de deux façon différentes, la fonction

$$f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

1) Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) **Une première méthode avec étude de fonction.**
   a) Montrer que f est dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$ qui est l'union de quatre intervalles disjoints.
   b) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash D$.
   c) Calculer la dérivée de f sur D.
   d) Justifier que f est constante sur $[-1\,;0]$. On précisera la valeur de cette constante.
   e) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) = \pi - 4\operatorname{Arctan}(x)$.
   f) De même, simplifier l'expression de f sur les deux derniers intervalles formant D.

3) **Une second méthode avec de la trigonométrie.**
   On introduit la fonction
   $$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\left(\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) \end{array} \right.$$
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in \,]-\pi\,;\pi[$ tel que $x = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
   b) Pour tout $\theta \in \,]-\pi\,;\pi[$, exprimer $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ en fonction de x.
   c) Supposons que $\theta \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$. Prouver que
   $$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \frac{\pi}{2}+\theta \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = \frac{3\pi}{2}+\theta.$$
   En déduite $g(\theta)$.
   d) Sur le même principe, en distinguant trois cas, simplifier $g(\theta)$ lorsque $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.
   e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer f en fonction de g et retrouver l'expression de f obtenue dans la première partie.

4) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de f.

On considère trois complexes a, b et c distincts. On note r le module et α un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$, s le module et β un argument de $\dfrac{a-b}{c-b}$, r le module et γ un argument de $\dfrac{b-c}{a-c}$. On a alors

$$\frac{c-a}{b-a} = re^{i\alpha}, \qquad \frac{a-b}{c-b} = se^{i\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{b-c}{a-c} = te^{i\gamma}.$$

1) Soient A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c. Interpréter géométriquement les quantités, r, s, t, α, β, et γ.

L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques propriétés des triangles que vous connaissez depuis le collège sans vraiment savoir pourquoi elle sont vraies. Par conséquent, on n'utilisera aucun argument géométrique dans les justifications des questions ci-dessous.

2) a) Calculer le produit rst, ainsi que la somme $\alpha+\beta+\gamma$ modulo 2π. Interpréter géométrique cette somme.

   b) Montrer que $r\cos(\alpha) + \dfrac{\cos(\beta)}{s} = 1$ et $r\sin(\alpha) - \dfrac{\sin(\beta)}{s} = 0$.

   On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que $s\cos(\beta) + \dfrac{\cos(\gamma)}{t} = 1$, $s\sin(\beta) - \dfrac{\sin(\gamma)}{t} = 0$, $t\cos(\gamma) + \dfrac{\cos(\alpha)}{r} = 1$ et $t\sin(\gamma) - \dfrac{\sin(\alpha)}{r} = 0$.

3) Dans cette question, nous souhaitons montrer que

$$|a-b| = |b-c| = |c-a| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,[2\pi]\,.$$

   On dira que la triangle ABC (ou BCA ou CAB) est équilatéral lorsqu'il satisfait l'une ou l'autre de ces deux conditions équivalentes.

   a) Montrer l'implication directe.

   b) Réciproquement, supposons que $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,[2\pi]$. Montrer que α est congru à $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{3}$ ou π modulo 2π.

   c) Montrer que α n'est pas congru à π modulo 2π.

   d) En déduire que $r = s = t = 1$ et conclure que l'implication indirect est vraie.

4) Notons $]0\,;\pi[+2\pi\mathbb{Z} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi\,;(2k+1)\pi[$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$$\alpha \in]0\,;\pi[+2\pi\mathbb{Z}, \qquad \beta \in]0\,;\pi[+2\pi\mathbb{Z}, \qquad \gamma \in]0\,;\pi[+2\pi\mathbb{Z}$$

   On dira que la triangle ABC (ou BCA ou CAB) est direct lorsqu'il satisfait l'une quelconque de ces trois conditions équivalentes.

5) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$. Traduire alors géométriquement le fait qu'un triangle ABC soit triangle équilatéral direct en terme de rotation.

   b) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

Pour tous points M, N et P du plan complexe, on appelle centre de gravité du triangle MNP le point dont l'affixe est la moyenne arithmétique des affixes de M, N et P.

6) Justifier que les médianes du triangle ABC sont concourantes en le centre de gravité de ABC.

7) On suppose dans cette question que ABC est un triangle direct. On note D, F et G les trois points du plan tels que les triangles DBA, FCB et GAC sont équilatéraux directs. On note M, N et P les centres de gravité respectifs des triangles DBA, FCB et GAC. On note d, f, g, m, n, p les affixes des points D, F, G, M, N, P.

   a) Déterminer une expression de m en fonction de a et b, une expression de n en fonction de b et c et une expression de p en fonction de c et a.

   b) Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct.

   c) Montrer que les triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

   Le résultat des deux dernières questions est appelé *théorème de Napoléon*.