Devoir maison n° 3

À rendre le lundi 23 septembre 2024

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Questions en vrac

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité [1] et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression).

1) $p : y \longmapsto \ln(|2y^2 + 9y - 5|)$.
2) $\mu : s \longmapsto \dfrac{\pi^s}{s}$.
3) $f : a \longmapsto (1 - a^{\sqrt{5}})^{6/11}$.
4) $\varphi : x \longmapsto x^{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2 : Une fonction de taux

Partie A : Une première étude de fonctions

Considérons la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{2}(1-t)\ln(1-t) + \dfrac{1}{2}(1+t)\ln(1+t)$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2) Étudier la parité de f sur D_f.
3) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Montrer que f est convexe sur D_f.
6) Montrer que f est prolongeable par continuité en les deux extrémités de D_f.
7) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   On placera notamment la tangente à la courbe en le point d'abscisse $1/2$. *On pourra utiliser le fait que* $\ln(2) \approx 0,69$ *et* $\ln(3) \approx 1,1$.

Partie B : Une fonction définie comme un maximum

On fixe $t \in D_f$ et on définit la fonction G_t par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_t(x) = xt - \ln(\mathrm{ch}(x)).$$

1) Justifier que G_t est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2)
   a) Calculer $G_t'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire que G_t admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en $f'(t)$.
   c) Vérifier par le calcul que le maximum de G_t est égal à $f(t)$.

1. Plus précisément, on appliquera les théorèmes de dérivabilité du cours et, si ces théorèmes excluent des points du domaine de définition, on n'essaiera pas d'établir la dérivabilité en ces points « à la main ».

3) Montrer que $G_t(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et que la droite d'équation $y = (t-1)x + \ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative de G_t en $+\infty$.

On obtient, de façon analogue, que $G_t(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et que la droite d'équation $y = (t+1)x + \ln(2)$ est asymptote à la courbe représentative de G_t en $-\infty$ (on ne demande pas de le justifier).

4) On suppose que $t \in \,]0\,;1[$.

a) Dresser le tableau de variations complet de G_t. *On fera aussi apparaître le point d'abscisse* 0.

b) Justifier rigoureusement que G_t s'annule en exactement deux réels : 0 et un autre qui est strictement supérieur à $f'(t)$.
On ne cherchera pas à expliciter le point en question.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On placera les points d'abscisses 0 *et* $f'(t)$ *ainsi que leurs tangentes. On placera aussi la droite d'équation* $y = \ln(2)$ *et les asymptotes en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *On ne cherchera pas à être précis mais on tracera la courbe avec soin et cohérence.*