

# Devoir maison n° 21

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

## EXERCICE 1 : AVEC OU SANS REMISE

---

On lance une pièce qui donne Face trois fois plus souvent que Pile. On dispose d'une urne contenant 6 boules dont 2 rouges et 4 bleues. On tire trois boules dans cette urne successivement...

- avec remise si la pièce a donné Face.
- sans remise si la pièce a donné Pile.

On a tiré en tout deux boules rouges. Quelle est la probabilité que la pièce est tombée sur Face ?

## EXERCICE 2 : GUINNESS WORLD RECORDS

---

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On prélève au hasard ces  $n$  boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne). A la suite de cette expérience, on note, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $u_i$  le numéro de la boule obtenue au cours du  $i^{\text{ième}}$  tirage. Pour tout  $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ , on dit qu'il y a un record au  $i^{\text{ième}}$  tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \dots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au  $i^{\text{ième}}$  tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

1) Déterminer un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  qui modélise cette expérience. Préciser  $\text{card}(\Omega)$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on introduit l'événement  $R_i$  : « il y a un record au  $i^{\text{ième}}$  tirage ». On a donc  $\mathbb{P}(R_1) = 1$ .

2) Que vaut  $\mathbb{P}(R_n)$ .

3) Soit  $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ .

a) Justifier que  $\text{card}(R_i) = \binom{n}{i} \times (i-1)! \times (n-i)!$ .

b) En déduire  $\mathbb{P}(R_i)$ .

4) a) Soient  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ . Soient  $i_1, \dots, i_k$  des entiers de  $\llbracket 2; n \rrbracket$  tels que  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ . Justifier que  $\text{card}(R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap \dots \cap R_{i_k})$  est

$$\binom{n}{i_k} (n - i_k)! \times \binom{i_k - 1}{i_{k-1}} (i_k - i_{k-1} - 1)! \times \binom{i_{k-1} - 1}{i_{k-2}} (i_{k-1} - i_{k-2} - 1)! \\ \times \dots \times \binom{i_2 - 1}{i_1} (i_2 - i_1 - 1)! \times (i_1 - 1)!$$

b) En déduire que  $R_1, \dots, R_n$  sont mutuellement indépendants.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la variable aléatoire  $X_n$  qui compte le nombre de records.

5) Calculer  $\mathbb{P}(X_n = 1)$  et  $\mathbb{P}(X_n = n)$ .

6) Pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , notons  $A_k$  : « la boule numérotée  $n$  sort au  $i^{\text{ième}}$  tirage ».

a) Soit  $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ . Justifier que  $\text{card}([X_n = 2] \cap A_k) = \binom{n-1}{k-1} (n-k)!$ .

b) En déduire que

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

7) a) Exprimer  $X_n$  en fonction des variables aléatoires  $\mathbb{1}_{R_1}, \dots, \mathbb{1}_{R_n}$ .

b) En déduire  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

8) Dans cette question, nous allons faire varier  $n$ . On se donne  $\varepsilon > 0$ .

a) Donner des équivalents simples de  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) Justifier que, pour tout  $n \geq n_0$

$$\left[ \left| \frac{X_n}{\ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right] \subset \left[ \left| \frac{X_n}{\ln(n)} - \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\ln(n)} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

d) En déduire que

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{X_n}{\ln(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On dit que  $\frac{X_n}{\ln(n)}$  converge en probabilité vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .