Devoir maison n° 20

À rendre le samedi 14 juin 2025

Problème : D'après Centrale PC 2015

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Pour tout endomorphisme f de E on définit la suite $\left(f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \end{cases}$$

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f si, pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Partie A :

Dans cette partie, f est un endomorphisme de E.

1) Soit F une droite de E engendrée par un vecteur u (non nul). Montrer que F est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$ (on dit que u est un vecteur propre et que λ est une valeur propre).
2) a) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces vectoriels de E stables par f.
   b) Dans cette question uniquement, on suppose que f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   À l'aide d'un dessin, caractériser géométriquement l'application f, puis expliquer rapidement pourquoi elle n'admet que les deux sous-espaces stables donnés à la question précédente.
   c) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par f.
   d) On suppose dans cette question uniquement que f est non nulle et non injective, et que E est de dimension finie impaire. Montrer que f admet au moins quatre sous-espaces stables.
3) a) Montrer que si F est engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$ vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (cf définition dans la première question), alors F est stable par f.
   b) Que peut-on dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?
4) On suppose que E est de dimension finie et admet une base de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et utiliser le théorème de la base incomplète.

Partie B :

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2 et f est un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts tels que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$$

où, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $E_k = \{x \in E \mid f(x) = \lambda_k x\}$, c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des E_k (vous verrez les sommes directes de plus de deux espaces vectoriels l'an prochain). Le but de cette partie est de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si

$$F = \bigoplus_{k=1}^{p} (F \cap E_k)$$

c'est-à-dire si et seulement si tout élément de F s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des $F \cap E_k$.

1) Montrer que si F vérifie cette condition, alors il est stable par f.

2) On veut à présent montrer la réciproque : soit F un sous-espace de E stable par f et soit $x \in F$ non nul. Montrer l'existence et l'unicité de $x_1, \ldots, x_p \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

3) Puisque x est non nul, les x_i sont non tous nuls. Soit r le nombre de x_i non nuls. Quitte à renuméroter les x_i, on suppose que les r premiers exactement sont non nuls, c'est-à-dire que

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

avec $x_1, \ldots, x_r$ non nuls. Montrer que $\mathscr{B}_x = (x_1, \ldots, x_r)$ est une base de $V_x = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_r)$.

4) Montrer que pour tout $j \in [\![1\,;r]\!]$, $f^{j-1}(x) \in V_x$ et donner la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1 \leqslant j \leqslant r}$, écrits dans la base $\mathscr{B}_x$.

5) Montrer que cette matrice est inversible (on utilisera sans démonstration l'exemple du cours). En déduire que $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

6) En déduire que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!], x_i \in F$ et conclure.

Partie C :

On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme canoniquement associé.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D. On suppose que F est de dimension finie d non nulle. Soit $(P_1, \ldots, P_d)$ une base de F.

   a) Soit R un polynôme de cette base de degré maximal, soit n son degré. Montrer que F est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   b) Montrer que la famille $\left(D^i(R)\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est libre dans F.
   c) En déduire que $F = \mathbb{R}_n[X]$.

3) Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie stable par D.

   a) Montrer que pour tout n, F contient un polynôme P de degré supérieur ou égal à n.
   b) En déduire que $F = \mathbb{R}[X]$, puis donner tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par D.

4) Donner un endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ tel qu'aucun sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie non nulle ne soit stable par u. Existe-t-il un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ distinct de $\mathbb{R}[X]$ et de $\{0\}$ qui soit stable par u ?

5) On considère dans cette question un endomorphisme f de E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

   a) Déterminer l'ensemble des $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.
   b) Dans le cas où cette condition est vérifiée, donner la matrice de f dans cette base.
   c) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.