Devoir maison n$^{\text{o}}$ 2

À rendre le lundi 16 septembre 2024

Ce devoir est ***individuel*** *et* ***obligatoire****. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, demandez de l'aide à vos camarades ou à moi même et, si vous n'y arrivez vraiment pas, je préfère que vous ne traitiez pas la question plutôt que de la recopier sur quelqu'un d'autre.*

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Résoudre l'inéquation $2 - x + \sqrt{2x-1} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour résoudre cette inéquation.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Justifier que $\sqrt{4n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$.
   b) Justifier que $0 < \sqrt{4n+2} - \sqrt{4n+1} < 1$.
   c) En déduire que $\lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor$.

Exercice 2 : Inégalité arithmético-géométrique

Partie A : Cas particuliers

1) Montrer que, pour tous réels positifs x et y,
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$
2) Montrer que, pour tous réels positifs x, y, z et t,
$$\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x+y+z+t}{4}.$$
   On appliquera l'inégalité de la question précédente à deux réels bien choisis.
3) Montrer que, pour tous réels positifs x, y et z,
$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}.$$
   On appliquera l'inégalité de la question précédente avec $t = \dfrac{x+y+z}{3}$.

Partie B : Cas général

Nous allons montrer que cette inégalité se généralise à un nombre fini quelconque de réels positifs, c'est-à-dire
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$
Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, notons S_n la somme $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et P_n le produit $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n$ puis posons
$$H(n) : \text{« } \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \sqrt[n]{P_n} \leqslant \frac{S_n}{n} \text{ . »}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Donnons-nous alors $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$.

   a) Que dire si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $x_i = 0$? On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

   b) On pose alors
   $$x = \frac{n}{n+1}\frac{S_{n+1}}{S_n} - 1.$$
   En utilisant l'inégalité de Bernoulli (cf. exercice 6 du TD n° 2), montrer que
   $$(1+x)^{n+1} \geqslant \frac{n x_{n+1}}{S_n}.$$

   c) En déduire que $H(n+1)$ est vraie.

2) Conclure.